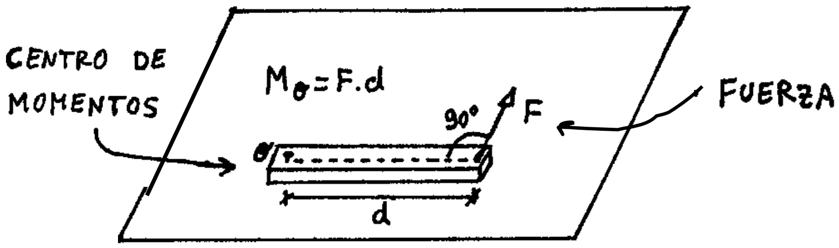
3.1. Equilibrio estático.

MOMENTO DE UNA FUERZA

Para resolver el asunto de fuerzas que no pasan por un mismo punto se utiliza una definición que se llama momento de una fuerza. Se define el momento de una fuerza con respecto a un punto O como:

$$\boxed{M_O = F \cdot d \operatorname{sen}\theta} \Leftarrow$$ Momento de una fuerza con respecto al punto ó.



La distancia que va del punto (eje de rotación) a la fuerza se llama **d** y F es la componente de la fuerza en forma perpendicular a d (ojo con esto). Si la fuerza está inclinada como en el dibujo de acá abajo, el momento de la fuerza con respecto a O vale $M_o = F_y \cdot d$ (F_y es la componente de la fuerza perpendicular a d).

SIGNO (+) O (-) DEL MOMENTO DE UNA FUERZA

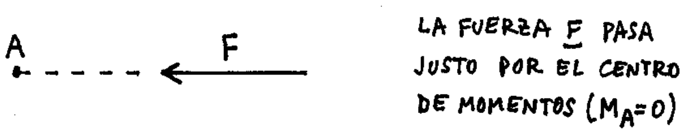
Una fuerza aplicada a un cuerpo puede hacerlo girar en sentido de las agujas del reloj o al revés. Es decir: Como hay 2 sentidos de giro posibles, uno de los dos tendrá que ser positivo y el otro negativo.
Para decidir cuál es positivo y cual es negativo hay varias convenciones. Una de las convenciones dice así: " el momento de la fuerza será positivo cuando haga girar al cuerpo en sentido contrario al de las agujas del reloj".

Otra convención, dice: " el momento será (+) cuando la fuerza en cuestión haga girar al cuerpo en el mismo sentido que las agujas del reloj ".

Pero la convención que más se suele usar, es esta: Antes de empezar el problema uno marca en la hoja el sentido de giro que elige como positivo poniendo esto: (+) ↻ (giro horario positivo) o esto: ↺(+) (giro antihorario positivo).

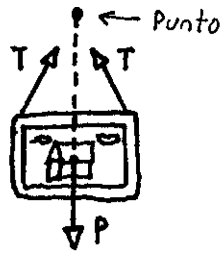
¿ Puede el momento de una fuerza ser cero ?

Puede. Para que M (= F . d) sea cero, tendrá que ser cero la fuerza o tendrá que ser cero la distancia. Si F = 0 no hay momento porque no hay fuerza aplicada. Si d es igual a cero, quiere decir que la fuerza pasa por el centro de momentos.

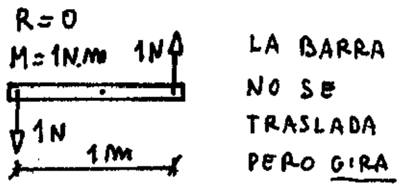


CONDICIÓN DE EQUILIBRIO PARA FUERZAS NO CONCURRENTES

Supongamos el caso de un cuerpo que tiene aplicadas fuerzas que pasan todas por un punto. Por ejemplo, un cuadro colgado de una pared.



Para estos casos, la condición para que el tipo estuviera en equilibrio era que la suma de todas las fuerzas que actuaban fuera cero. O sea, que el sistema tuviera resultante nula. Esto se escribía en forma matemática poniendo que $\sum F_x = 0$ y $\sum F_y = 0$.
Muy bien, pero el asunto de que **R** fuera cero, sólo garantizaba que el cuerpo no se trasladará.
Ahora, si las fuerzas NO PASAN POR UN MISMO PUNTO , puede ser que la resultante sea cero y que el cuerpo no se traslade. Pero el cuerpo podría estar girando. Mirá el dibujito.



CUPLA
(O PAR)

En este dibujito, la resultante es **cero**, sin embargo la barra está girando. Esto es lo que se llama CUPLA (o par). Una cupla son 2 fuerzas iguales y de sentido contrario separadas una distancia d. La resultante de estas fuerzas es cero, pero su momento NO. Al actuar una cupla sobre un cuerpo, el objeto gira pero no se traslada.

El responsable de la rotación es el momento de las fuerzas que actúan. Por eso es que cuando las fuerzas no pasan por un mismo punto, hay que agregar una nueva condición de equilibrio. Esta condición es que el momento total que actúa sobre el cuerpo debe ser **CERO**. La ecuación es $\sum M_ó = 0$. Se llama ecuación de momentos. Al igualar la suma de los momentos a cero una garantiza el equilibrio de rotación. Es decir, que la barra no esté girando.

ENTONCES:

PARA QUE ESTÉ EN EQUILIBRIO UN CUERPO QUE TIENE UN MONTÓN DE FUERZAS APLICADAS QUE NO PASAN POR UN MISMO PUNTO, DEBE CUMPLIRSE QUE :

$\sum F_x = 0$	Garantiza que no hay traslación en x.
$\sum F_y = 0$	Garantiza que no hay traslación en y.
$\sum M_ó = 0$	Garantiza que no hay rotación.

CONCLUSIÓN (LEER)

Para resolver los problemas de estática en donde las fuerzas NO pasan por un mismo punto hay que plantear tres ecuaciones.
Estas ecuaciones van a ser dos de proyección ($\sum F_x$ y $\sum F_y$) y una de momentos ($\sum M_ó = 0$). Resolviendo las ecuaciones que me quedan, calculo lo que me piden.

3.1.1. Ejercicios resueltos.

1. Una barra rígida con masa despreciable y de longitud 3d puede girar en el apoyo W. Si dos fuerzas cada una de magnitud F están aplicadas en los extremos, como se muestra en la figura 231, ¿en qué punto(s) V, W, X o Y una tercera fuerza vertical de magnitud F debe ser aplicada para que la barra esté en equilibrio? (Examen de mejoramiento de Física I, I Término 2003 – 2004)
   a) W y V b) V y Y c) V y X d) X y Y e) W y X

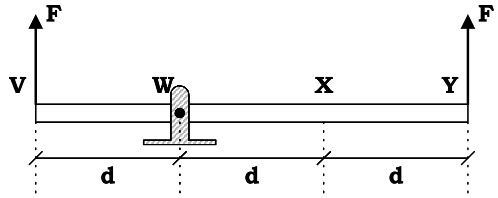


Figura 231

SOLUCIÓN

Para que se mantenga el equilibrio en la barra deben cumplirse las dos condiciones de equilibrio, esto es que la suma de las fuerzas, aplicadas a la barra, sea cero; y, que la suma de las torcas (o torques) generadas por las fuerzas aplicadas sea cero.
Por la primera condición de equilibrio tenemos que la fuerza que se debe aplicar, P, a la barra es

$$\sum Fy = 0$$
$$2\vec{F} + \vec{P} = 0$$
$$\vec{P} = -2\vec{F}$$

pero esto es distinto de las condiciones que nos presenta el problema, debido a que nos piden encontrar una fuerza de magnitud F, y no de magnitud 2F como hemos encontrado por la primera condición de equilibrio.
De la segunda condición de equilibrio, tomada con referencia a la figura 231 tenemos que

$$\sum \tau = 0$$
$$\tau_{F1} + \tau_{F2} + \tau_{F3} = 0$$

siendo aquí F_1 la fuerza de magnitud F localizada en el punto V, la fuerza F_2, la de magnitud F localizada en el punto Y, y la fuerza F_3, la fuerza de magnitud F que no sabemos donde quedará ubicada, a esta longitud medida a partir del eje de rotación W, la denominaremos D. Además, seguiremos la convención que el torque que genere una rotación en la misma dirección que las manecillas del reloj será negativo, y en dirección opuesta, positivo, siempre y cuando se mantenga el equilibrio, si no ocurriera el equilibrio tomaremos en cuenta la dirección de la aceleración angular, α.

$$-F_1 d + F_2(2d) + F_3 D = 0$$
$$FD = -2Fd + Fd$$
$$FD = -Fd$$

La ecuación obtenida anteriormente nos muestra que la fuerza de magnitud F debe producir un torque negativo, por lo tanto la fuerza debe aplicarse verticalmente hacia arriba si la colocamos del lado izquierdo del eje de rotación, y debe ser colocada verticalmente hacia abajo si la colocamos del lado derecho del eje de rotación, al simplificar la ecuación anterior observaremos que la distancia D buscada tiene una longitud d, por lo tanto la fuerza puede ser aplicada en los puntos V y X para que se mantenga el equilibrio.
Respuesta: c

2. El trampolín de la figura 232, con masa despreciable, se mantiene en equilibrio cuando una persona que pesa 600 N se encuentra parada en el extremo. ¿Cuál es la fuerza que el tornillo ejerce sobre el trampolín? (Examen de mejoramiento de Física I, I Término 2002 – 2003)
a) 600 N b) 300 N c) 900 N d) 160 N e) 240 N

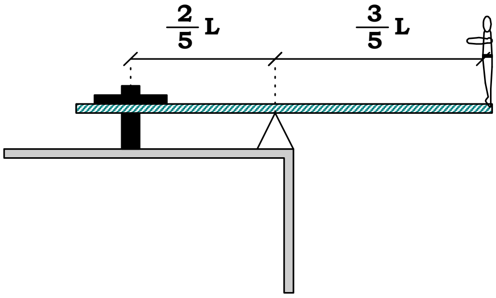


Figura 232

SOLUCIÓN
La fuerza que se debe aplicar por el tornillo al sistema, debe ser tal que mantenga el equilibrio, debido a que el trampolín intentará rotar en el sentido horario por la aplicación de la normal del hombre sobre él (¿o acaso estoy equivocado y se aplica al trampolín el peso del hombre?, ¡sáquenme por favor de esa duda recurriendo a la definición de peso y de reacción normal!), la fuerza que genera el tornillo debe ser aplicada verticalmente hacia abajo para impedir dicha rotación. Aplicamos, entonces, la segunda condición de equilibrio al sistema, pero previo a esto hacemos el diagrama de cuerpo libre para el hombre y el trampolín.

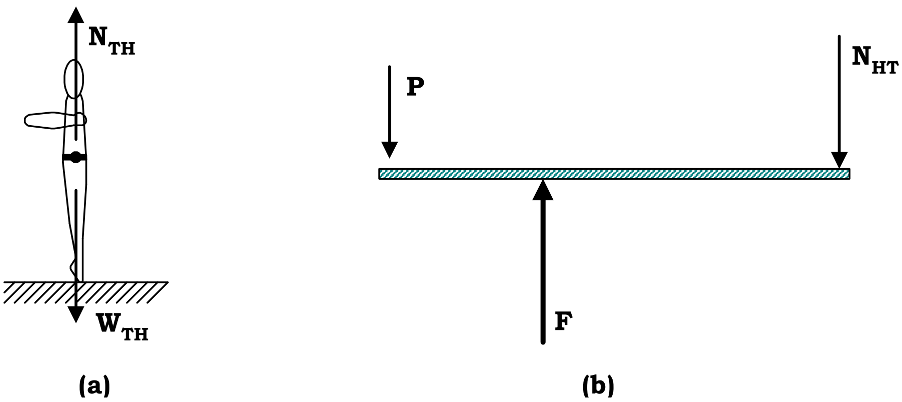


Figura 233

$$\sum \tau = 0$$
$$P\left(\frac{2}{5}L\right) - N_{HT}\left(\frac{3}{5}L\right) = 0$$

Aquí N_{HT} es la normal que genera el contacto de los pies del hombre con el trampolín, y por la primera ley de Newton sabemos que es igual (matemáticamente) al peso del hombre.

$$P\left(\frac{2}{5}L\right) = N_{HT}\left(\frac{3}{5}L\right)$$
$$P = \frac{(600N)\left(\frac{3}{5}L\right)}{\left(\frac{2}{5}L\right)}$$
$$P = 900N$$

Respuesta: c

3. El sistema mostrado en la figura 234 se encuentra en equilibrio; la masa de la barra es de 20 kg y se aplica una fuerza de 100 N sobre la misma, a 2 m del pivote A; encuentre el valor de la masa M que se requiere para obtener esta configuración. Considere la cuerda y la polea con masa despreciable. (Deber # 6, I Término 2003 – 2004)

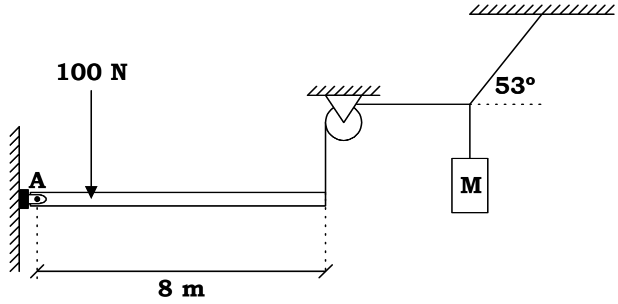


Figura 234

SOLUCIÓN

Realizamos el análisis de las fuerzas que actúan en la unión de las tres cuerdas donde se coloca la masa m, observe la figura 235.

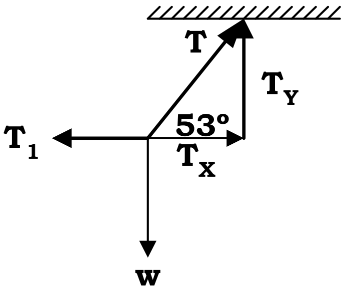


Figura 235

$$\sum Fx = 0$$
$$Tx - T_1 = 0$$
$$T\cos 53º = T_1 \quad (1)$$

$$\sum Fy = 0$$
$$Tsen53º - w = 0$$
$$Tsen53º = Mg \quad (2)$$

Dividiendo la ecuación (2) entre la ecuación (1) tenemos que la tensión T_1 es igual a

$$T_1 = Mg/\tan 53º$$

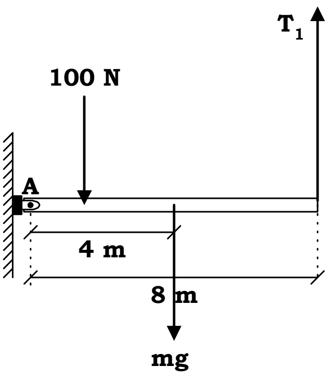


Figura 236

Luego de haber encontrado la relación entre la tensión T_1 y la masa M, realizamos el análisis rotacional, figura 236.

$$\sum \tau = 0$$
$$T_1(8m) - (100[N])(2m) - (20kg)(9.8m/s^2)(4m) = 0$$
$$\left(\frac{Mg}{Tan53º}\right)(8) = 396$$
$$M = 123Tan53$$

$$M = 163.23 \text{ kg}$$

4. Si la cuerda BC falla cuando la tensión es de 50 kN, determine la carga vertical máxima, F, que se puede aplicar en B. ¿Cuál es la magnitud de la reacción en A para esta carga? Desprecie el espesor de esta viga. (Deber # 6, I Término 2003 – 2004)

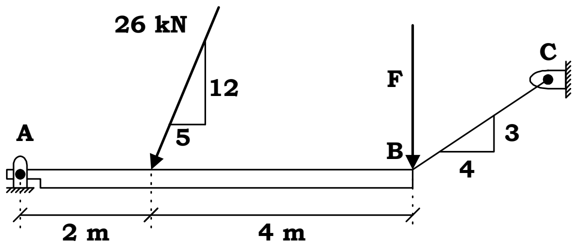


Figura 237

SOLUCIÓN

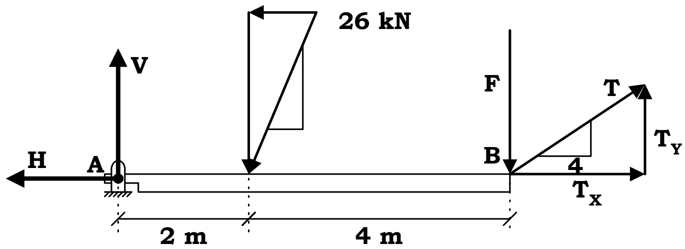


Figura 238

En la figura 238 se muestra el diagrama de cuerpo de la barra.
Realizamos el análisis de torque en el punto A.

$$\sum \tau = 0$$
$$V(0) + H(0) - (26sen\varphi)(2m) - F(6m) + Tsen\phi = 0$$

Aquí φ es el ángulo que forma la fuerza de 26 kN con el eje x, y ϕ es ángulo que forma la tensión T con el eje x. Observe también que nos dan como datos dos triángulos, no suponga que esas son las componentes rectangulares de los vectores fuerza, son solamente datos para poder calcular el ángulo que forma el vector con alguno de los ejes. A continuación, por medio del Teorema de Pitágoras, calculamos el lado faltante de cada triángulo, y posteriormente encontramos las funciones seno y coseno.

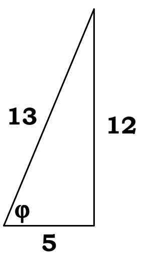


Figura 239

$$d^2 = 12^2 + 5^2$$
$$d = 13$$
$$sen\varphi = \frac{12}{13} \qquad \cos\varphi = \frac{5}{13}$$

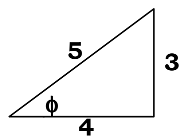


Figura 240

$$D^2 = 3^2 + 4^2$$
$$D = 5$$
$$sen\phi = \frac{3}{5} \qquad \cos\phi = \frac{4}{5}$$

Reemplazando estos resultados en la ecuación anterior tenemos

$$-26\left(\frac{12}{13}\right)(2m) - F(6m) + 50\left(\frac{3}{5}\right)(6) = 0$$
$$6F = 180 - 48$$
$$F = 22kN$$

Con el análisis de las leyes de Newton encontramos las reacciones horizontal y vertical.

$$\sum Fx = 0$$
$$-H + Tx - 26cos\varphi = 0$$
$$H = -26\left(\frac{5}{13}\right) + 50\left(\frac{4}{5}\right)$$
$$H = 30kN$$

$$\sum Fy = 0$$
$$V - 26sen\varphi - F + 50sen\phi = 0$$
$$V = 26\left(\frac{12}{13}\right) - 50\left(\frac{3}{5}\right) + 22$$
$$V = 16kN$$

5. El disco, de 120 mm de radio, mostrado en la figura 241 tiene una masa de 20 kg y descansa sobre una superficie inclinada lisa. El extremo de un resorte de constante k = 400 N/m está unido al centro del disco, y el otro extremo está unido al rodamiento en A, permitiendo que el resorte permanezca horizontal, cuando el disco está en equilibrio. Si la longitud del resorte sin deformar es 200 mm, determine su longitud máxima cuando el disco está en equilibrio. Desprecie el tamaño y el peso del rodamiento. (Lección de Física I, II Término 2003 – 2004)

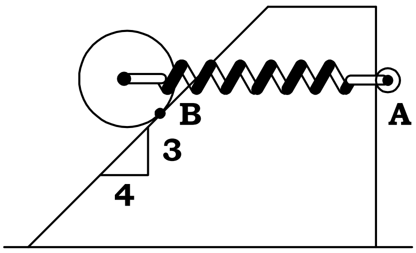


Figura 241

SOLUCIÓN

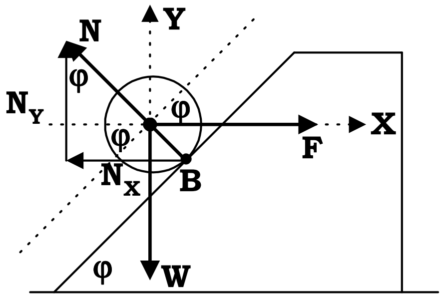


Figura 242

Realizamos el diagrama de cuerpo libre del sistema.
Para que el sistema se encuentre en equilibrio se deben cumplir las dos condiciones de equilibrio.

$$\sum Fx = 0 \qquad\qquad \sum Fy = 0$$
$$F - Nx = 0 \qquad\qquad Ny - W = 0$$
$$F = Nsen\varphi \quad (1) \qquad\qquad mg = N\cos\varphi \quad (2)$$

Dividimos las dos ecuaciones anteriores

$$\frac{F}{mg} = \frac{Nsen\varphi}{N\cos\varphi}$$
$$k\Delta x = mg\tan\varphi$$
$$\Delta x = \frac{mg\tan\varphi}{k}$$
$$x_{FINAL} - x_{INICIAL} = \frac{mg\tan\varphi}{k}$$
$$x_{FINAL} = x_{INICIAL} + \frac{mg\tan\varphi}{k}$$
$$x_{FINAL} = 0.200m + \frac{20kg\left(9.8m/s^2\right)\left(\frac{3}{4}\right)}{400N/m}$$
$$x_{FINAL} = 0.568m$$
$$x_{FINAL} = 568mm$$

También podemos llegar al mismo resultado por medio de la suma de torques alrededor del punto B. Tome como referencia el gráfico mostrado en la figura 243.

$$\sum \tau = 0$$
$$w(R_X) - F(R_Y) = 0$$
$$w(Rsen\varphi) = F(R\cos\varphi)$$
$$(mg)\left(\frac{sen\varphi}{\cos\varphi}\right) = k\Delta x$$
$$\Delta x = \frac{mgTan\varphi}{k}$$

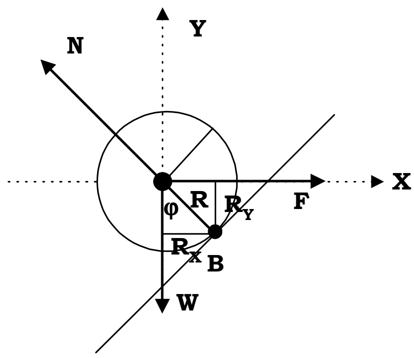


Figura 243

Que es exactamente el mismo resultado que se obtuvo antes.

6. ¿Cuál es la mínima fuerza F que se debe aplicar al eje de la rueda para levantarla, sobre el obstáculo de altura h = 20 cm? (Deber de estática de cuerpos rígidos, II Término 2001 – 2002)

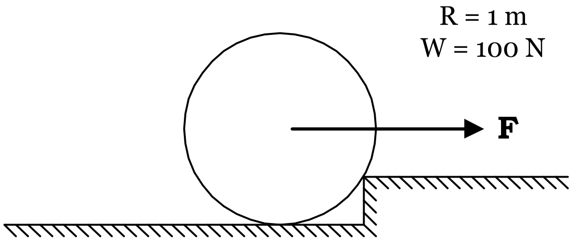


Figura 244

SOLUCIÓN

Al aplicar la fuerza F la rueda se apoya sobre es vértice del obstáculo, el mismo que será el eje de rotación y sobre el que realizaremos el análisis respectivo.

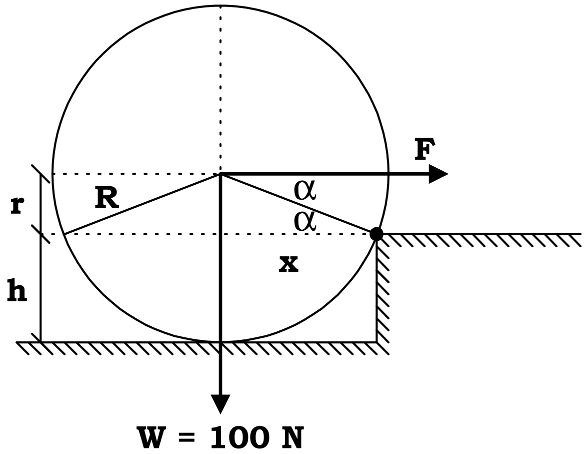


Figura 249

Debido a que el equilibrio continúa la suma de momentos con respecto al punto de apoyo es

$$\sum \tau = 0$$

$$wR\cos\alpha - FRsen\alpha = 0$$

$$wR\left(\frac{x}{R}\right) = FR\left(\frac{r}{R}\right)$$

$$wx = Fr \qquad (1)$$

donde x podemos calcularlo por medio del teorema de Pitágoras, o sea,

$$x^2 + r^2 = R^2$$

$$x = \sqrt{R^2 - r^2} \qquad (2)$$

y el valor de r podemos obtenerlo del hecho que

$$r + h = R \Rightarrow r = R - h \qquad (3)$$

Reemplazamos las ecuaciones (2) y (3) en la ecuación (1)

$$w\sqrt{R^2 - r^2} = Fr$$

$$w\sqrt{R^2 - (R-h)^2} = F(R-h)$$

$$w\sqrt{[R + (R-h)][R - (R-h)]} = F(R-h)$$

$$F = \frac{w\sqrt{h(2R-h)}}{R-h}$$

$$F = \frac{100N\sqrt{[2(1m) - 0.2m](0.2m)}}{1m - 0.2m}$$

F = 75[N]

7. Una esfera maciza de radio R = 20 cm y masa M = 3 kg está en reposo sobre un plano inclinado 30º, sostenida por una cuerda inextensible horizontal, tal como lo muestra la figura 250. Encuentre:
   a) la fuerza normal del plano sobre el cuerpo.
   b) la fricción entre el plano y la esfera, y,
   c) la tensión en la cuerda.
   (Deber de equilibrio, I Término 2004 – 2005)

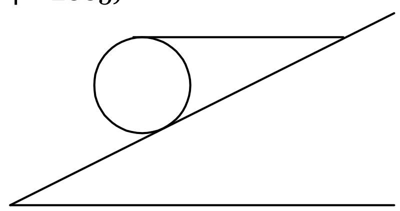


Figura 250

SOLUCIÓN

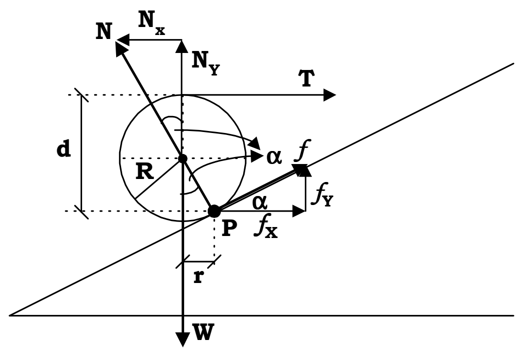


Figura 251

a) Primero realizamos el diagrama de cuerpo libre de la esfera, tal como se muestra en la figura 251. Debido a que la esfera se encuentra en equilibrio se cumplen las dos condiciones de equilibrio, esto es, la suma de las fuerzas aplicadas a la esfera es cero, y la suma de torques es cero.

$$\sum Fx = 0 \qquad \sum Fy = 0$$
$$T - Nx + fx = 0 \qquad -mg + fy + Ny = 0$$
$$T + f\cos\alpha = NSen\alpha \quad (1) \qquad mg = fsen\alpha + NCos\alpha \quad (2)$$

Analizamos el equilibrio rotacional con respecto al centro de masa de las esfera, debido a que si lo hacemos en el punto P se anulan la fuerza f y la fuerza N.

$$\sum \tau = 0$$
$$fR - TR + N(0) = 0$$
$$f = T \qquad (3)$$

Si reemplazamos la ecuación (3) en las ecuaciones (1) y (2), tenemos:

$$f + f\cos\alpha = N\,sen\alpha \ (1)$$
$$f(1+\cos\alpha) = N\,sen\alpha$$

Esta última ecuación la reemplazamos en la ecuación (2)

$$mg = \left(\frac{Nsen\alpha}{1+\cos\alpha}\right)sen\alpha + N\cos\alpha$$
$$mg(1+\cos\alpha) = Nsen^2\alpha + (N\cos\alpha)(1+\cos\alpha)$$
$$mg(1+\cos\alpha) = (N\cos\alpha)(1+\cos\alpha) + Nsen^2\alpha$$
$$mg(1+\cos\alpha) = N\left[(\cos\alpha)(1+\cos\alpha) + sen^2\alpha\right]$$
$$mg(1+\cos\alpha) = N\left[\cos\alpha + \cos^2\alpha + sen^2\alpha\right]$$
$$mg(1+\cos\alpha) = N(1+\cos\alpha)$$
$$N = mg = 3kg(9.8m/s^2)$$

$$N = 29.4[N]$$

b) El resultado anterior lo reemplazamos en la ecuación (1)

$$f = \frac{29.4[N]sen30^o}{1+\cos 30^o}$$

$$f = 7.88\ [N]$$

c) de la ecuación (3), la tensión en la cuerda es

$$T = 7.88\ [N]$$

8. Un brazo de grúa de 1200 N de peso se sostiene por el cable AB de la figura 252. Este brazo está sujeto al suelo mediante la articulación C, y en la parte superior se cuelga un cuerpo de 200 N. Encuentre:
   a) la tensión en el cable, y,
   b) Las componentes de la reacción en la articulación.
   (Tomado de Física para Ciencias e Ingeniería de Raymond A. Serway)

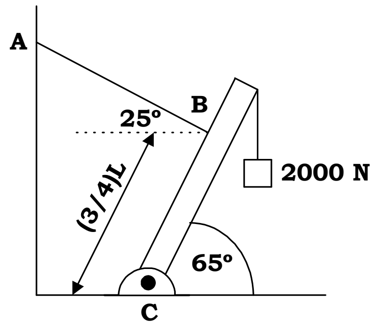


Figura 252

SOLUCIÓN

a) Primero realizamos el diagrama de cuerpo libre de la barra, como se muestra en la figura 253. Posteriormente realizamos la suma de los torques en el pivote (punto C), sabiendo que si existe equilibrio esa suma debe ser igual a cero.

$$\sum \tau = 0$$

$$H(0)+V(0)-1200N(d)m+T\left(\frac{3}{4}L\right)-2000N(D)=0$$

$$T\left(\frac{3}{2}L\right)=1200N\left(\frac{L}{2}cos65^o\right)m+2000N(L\,cos65^o)m$$

$$T=\frac{4}{3L}\left[1200N\left(\frac{L}{2}cos65^o\right)m+2000N(L\,cos65^o)m\right]$$

$$T=800cos65^o+\frac{8000}{3}cos65^o$$

$$T=1465N$$

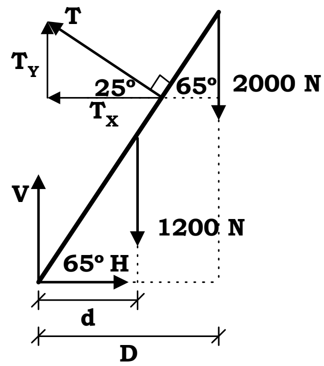


Figura 253

b) Posteriormente realizamos la suma de fuerzas en el eje x y en el eje y. Si está en equilibrio la barra esa suma debe ser igual a cero.

$$\sum Fx = 0$$

$$H-Tx=0$$

$$H=T\,cos25^o=1465N\,cos65^o$$

$$H=1328N$$

$$\sum Fy = 0$$

$$V+Ty-1200-2000=0$$

$$V=3200-1465sen25^o$$

$$V=2518N$$

9. La rampa de un barco tiene un peso de 200 libras y el centro de gravedad en G. Determine la fuerza en el cable CD que se necesita para comenzar a levantar la rampa, es decir, para que la reacción en B sea cero. También determine las componentes horizontal y vertical de la fuerza en el perno A. (Deber de Equilibrio estático, I Término 2003 – 2004)

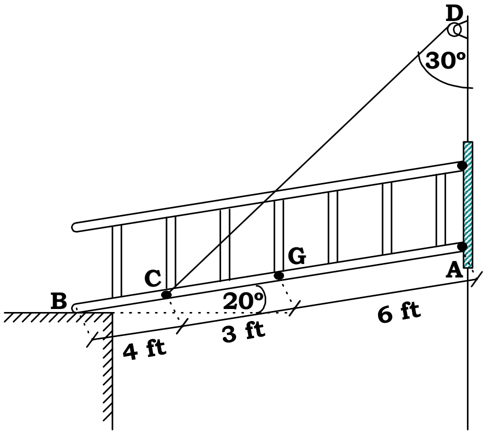


Figura 254

SOLUCIÓN

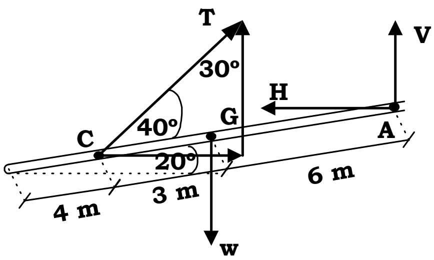


Figura 255

En el diagrama de cuerpo libre mostramos las fuerzas que actúan sobre la rampa.
Como se puede observar en la figura 255, el cable, que genera la tensión sobre la rampa, forma un ángulo de 60º con la horizontal, y por lo tanto un ángulo de 40º con la rampa, puesto que esta forma un ángulo de 20º con la horizontal. Primero realizamos el análisis rotacional.

$$\sum \tau = 0$$
$$V(0) + H(0) - (Tsen40^o)(9m) + w(6\cos 20^o) = 0$$
$$T = \frac{(200lb)(6\cos 20^o)}{9sen40^o}$$

T = 195 lb

Para calcular las componentes de la reacción en el punto A, realizamos el análisis de las leyes de Newton.

$$\sum Fx = 0$$
$$T\cos 60^o - H = 0$$
$$H = 195\cos 60^o$$

H = 97.5 lb

$$\sum Fy = 0$$
$$Tsen60^o - W + V = 0$$
$$V = 200 - 195sen60^o$$

V = 31.1 lb

10. Una escalera de 3 m de longitud y 98 N de peso está apoyada en una pared lisa AB y en un suelo horizontal AC rugoso de coeficiente de fricción estática 0.2.
    a) Encuentre la reacción de la pared y del suelo cuando un hombre de 686 N ha subido 50 cm a lo largo de la escalera.
    b) ¿Cuánto podrá subir como máximo el hombre por la escalera?
    (Deber de equilibrio estático, I Término 2002 – 2003)

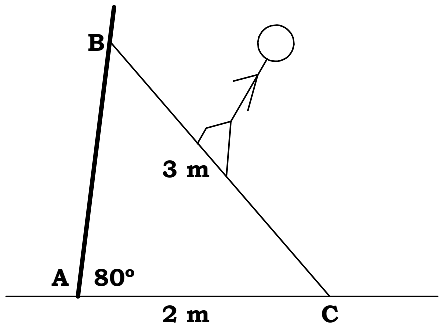


Figura 256

SOLUCIÓN

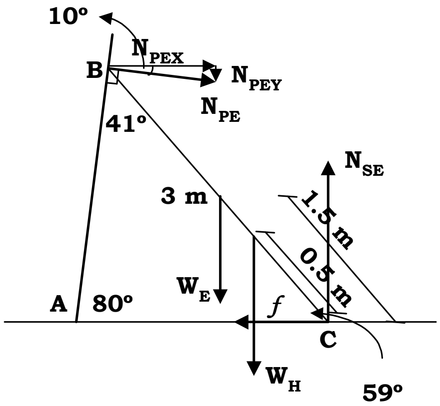


Figura 257

Realizamos el diagrama de cuerpo libre de la escalera, véase la figura 257. Los ángulos los encontramos por la ley del seno

$$\frac{sen80^o}{3m} = \frac{senB}{2m}$$
$$B = sen^{-1}\left(\frac{2}{3}sen80^o\right)$$
$$B = 41.04^o$$

El ángulo restante lo obtenemos del hecho que la suma de los tres ángulos internos de cualquier triángulo es 180º.

80º + 41.04º + C = 180º
C = 58.96º

a) Realizamos la suma de torques alrededor del punto de apoyo en el piso

$$\sum\tau = 0$$
$$W_H\left(\frac{L}{6}\right)(\cos 58.96^o) + W_E\left(\frac{L}{2}\right)(\cos 58.96^o) - (N_{PH})(L)(sen48.96^o) + N_{SE}(0) + f(0) = 0$$
$$(686N)(0.5m)(\cos 58.96^o) + (98N)(1.5m)(\cos 58.96^o) = (N_{PH}sen49^o)(3m)$$

$$N_{PH} = 111.59\ [N]$$

La reacción del piso la calculamos por medio de las leyes de Newton.

$$\sum Fx = 0$$
$$N_{PHX} - f = 0$$
$$N_{PH}\cos 10^o = f$$
$$f = 216.42[N]\cos 10^o$$

$$f = 109.90[N]$$

$$\sum Fy = 0$$
$$N_{SE} - N_{PHY} - w_H - w_E = 0$$
$$N_{SE} = N_{PH}sen10^o + m_H g + m_E g$$
$$N_{SE} = 111.59[N]sen10^o + 686[N] + 98[N]$$

$$N_{SE} = 803.30\ [N]$$

b) El análisis que se hará es similar al que ya hicimos anteriormente, esto es se plantean las ecuaciones que se obtienen de las dos condiciones de equilibrio.

$$\sum\tau = 0$$
$$W_H(x)(\cos 58.96^o) + W_E\left(\frac{L}{2}\right)(\cos 58.96^o) - (N_{PH})(L)(sen48.96^o) + N_{SE}(0) + fs\max(0) = 0$$
$$(686N)(x)(\cos 58.96^o) + (98N)(1.5m)(\cos 58.96^o) = (N_{PH}sen48.96^o)(3m)$$
$$353.73x + 75.8 = 2.26N_{PH} \qquad (1)$$

Las ecuaciones que representan a la suma de fuerzas son las mismas, sólo que ahora la fuerza que fricción que actúa es la estática máxima.

$$\sum Fx = 0$$
$$N_{PHX} - fsmáx = 0$$
$$N_{PH}\cos 10° = \mu N_{SE}$$
$$N_{PH} = \frac{\mu N_{SE}}{\cos 10°} \qquad (2)$$

$$\sum Fy = 0$$
$$N_{SE} - N_{PHY} - w_H - w_E = 0$$
$$N_{SE} = N_{PH} sen10° + m_H g + m_E g \qquad (3)$$

La ecuación que salió como del análisis del eje x la reemplazamos en la ecuación que resultó del análisis del eje y.

$$N_{SE} = \left(\frac{\mu N_{SE}}{\cos 10°}\right) sen10° + 686[N] + 98[N]$$
$$N_{SE} - (\mu N_{SE} Tan10°) = 784[N]$$
$$N_{SE}(1 - 0.2Tan10°) = 784[N]$$
$$N_{SE} = 812.66[N]$$

Este resultado lo reemplazamos en la ecuación (2), de donde obtenemos

$$N_{PH} = 165.04\ [N]$$

Resultado que a su vez reemplazamos en la ecuación (1).

$$x = 0.84\ m$$

11. Una escalera de mano se arma como se muestra en la figura 258. Un pintor de 70 kg de masa está parado a 3 m de la base. Suponiendo que el piso tiene fricción, el tramo AC de la escalera tiene 2.5 kg de masa y el tramo BC 2 kg, determine:
    a. La tensión en la cuerda que conecta las mitades de la escalera.
    b. Las reacciones en los apoyos A y B.
    c. Las componentes de la reacción en la unión C que el lado izquierdo de la escalera ejerce sobre el derecho.

    (Deber de equilibrio estático, I Término 2002 – 2003)

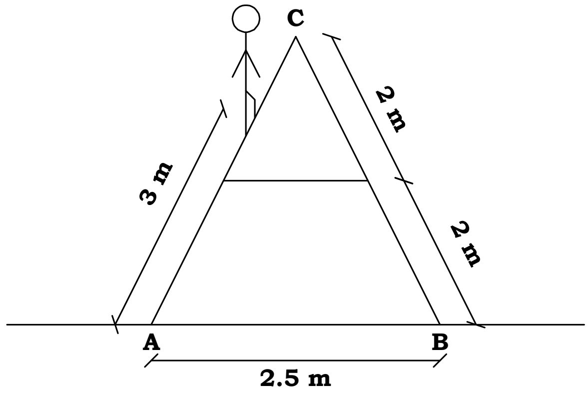


Figura 258

SOLUCIÓN

Hacemos el diagrama de cuerpo libre para cada parte de la escalera, pero previo al cálculo de las fuerzas solicitadas, calculamos los ángulos formados por la escalera y el piso y en la unión de las dos partes de la escalera utilizando la función coseno.

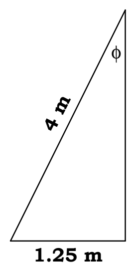


Figura 259

Al ser un triángulo isósceles el que se forma entre la escalera y el suelo, el ángulo que calcularemos será la mitad del ángulo C. Observe la figura 259.

$$sen\phi = \frac{1.25}{4}$$
$$\phi = 18.21^{o}$$

Por lo tanto el ángulo C es 35.42°.

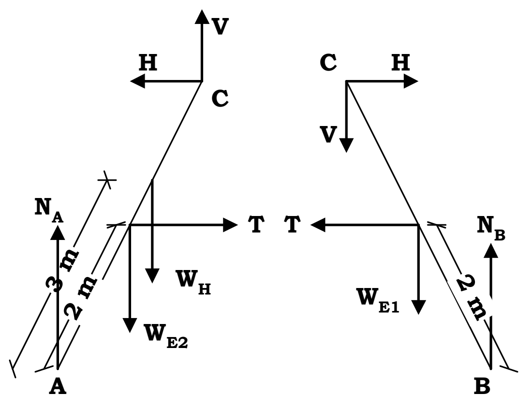


Figura 260

a) Como el sistema se mantiene en equilibrio, se cumplen las dos condiciones de equilibrio, esto es, la suma de fuerzas aplicadas en cada tramo de escalera es cero, y la suma de los torques generados por las fuerzas también es cero.

Tramo izquierdo de la escalera

$$\sum Fx = 0$$
$$T - H = 0$$
$$T = H \qquad (1)$$

$$\sum Fy = 0$$
$$N_A - W_H - W_{E2} + V = 0$$
$$N_A = W_H + W_{E2} - V \qquad (2)$$

$$\sum \tau = 0$$
$$W_H(1m)(sen18.21^{o}) + W_{E2}(2m)(sen18.21^{o}) + T(2m)(\cos 18.21^{o}) - N_A(4m)(sen18.21^{o}) = 0$$
$$\frac{W_H(1m)(sen18.21^{o})}{4m(sen18.21^{o})} + \frac{W_{E2}(2m)(sen18.21^{o})}{4m(sen18.21^{o})} + \frac{T(2m)(\cos 18.21^{o})}{4m(sen18.21^{o})} = N_A$$
$$N_A = \frac{1}{4}W_H + \frac{1}{2}W_{E2} + \frac{T}{2Tan18.21^{o}} \qquad (3)$$

Si reemplazamos la ecuación (2) en la (3) tenemos:

$$W_H + W_{E2} + V = \frac{1}{4}W_H + \frac{1}{2}W_{E2} + \frac{T}{2Tan18.21^{o}}$$
$$\frac{3}{4}W_H + \frac{1}{2}W_{E2} + V = \frac{T}{2Tan18.21^{o}} \qquad (4)$$

Tramo derecho de la escalera

$$\sum Fx = 0 \qquad\qquad \sum Fy = 0$$
$$T - H = 0 \qquad\qquad N_B - W_{E1} - V = 0$$
$$T = H \quad (5) \qquad\qquad N_B = W_{E1} + V \quad (6)$$

$$\sum \tau = 0$$
$$-W_{E1}(2m)(sen18.21^o) + T(2m)(\cos 18.21^o) - N_B(4m)(sen18.21^o) = 0$$
$$\frac{W_{E1}(2m)(sen18.21^o)}{4m(sen18.21^o)} + \frac{T(2m)(\cos 18.21^o)}{4m(sen18.21^o)} = N_B$$
$$N_B = \frac{1}{2}W_{E1} + \frac{T}{2Tan18.21^o} \qquad (7)$$

Reemplazamos la ecuación (6) en la ecuación (7)

$$W_{E1} - V = \frac{1}{2}W_{E1} + \frac{T}{2Tan18.21^o}$$
$$\frac{1}{2}W_{E1} - V = \frac{T}{2Tan18.21^o} \qquad (8)$$

Sumamos las ecuaciones (4) y (8)

$$\frac{3}{4}W_H + \frac{1}{2}W_{E2} + V = \frac{T}{2Tan18.21^o}$$
$$+$$
$$\frac{1}{2}W_{E1} - V = \frac{T}{2Tan18.21^o}$$
$$\frac{3}{4}W_H + \frac{1}{2}W_{E2} + \frac{1}{2}W_{E1} = \frac{T}{Tan18.21^o}$$

Al reemplazar los datos dados en el problema, o sea, m_H = 70kg, m_{E1} = 2 kg, m_{E2} = 2.5 kg, obtenemos

T = 176.51 [N]

b) Las reacciones N_A y N_B las calculamos al reemplazar el valor de la tensión en las ecuaciones (3) y (7)

N_A = 452.02 [N] $\qquad$ N_B = 278.07 [N]

c) Las componentes de la fuerza, que genera la parte derecha de la escalera sobre la parte izquierda, las calculamos al reemplazar los valores obtenidos anteriormente en las ecuaciones (1) y (2).

H = 176.51 [N] V = 258.48 [N]

3.1.2. Ejercicios propuestos.

1. Una varilla de masa despreciable de longitud L está suspendida de una cuerda atada a su centro. Una esfera de masa M está suspendida en el extremo izquierdo de la varilla. ¿Dónde debe suspenderse una segunda esfera de masa 2M para que la varilla permanezca horizontal? (Segunda evaluación de Física A, I Término 2007 – 2008)
   a) x = 2L/3
   b) x = 3L/4
   c) x = 4L/5
   d) x = 3L/5

   Respuesta: b)

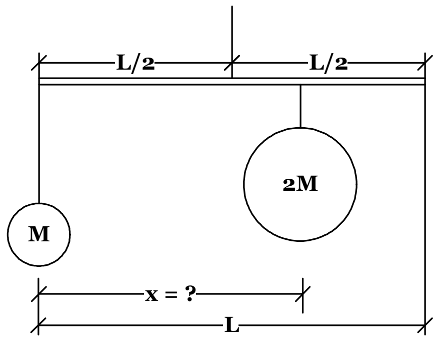


Figura 261

2. La barra homogénea de la figura 262 se encuentra en equilibrio en una posición horizontal. Encuentre la longitud natural (no deformada) del resorte para que la tensión en la cuerda sea igual al peso de la barra (M = masa de la barra = 200 kg; g = 10 m/s²). (Lección # 2 del segundo parcial de Física A, I Término 2007 – 2008)
   Respuesta: 1.55 m

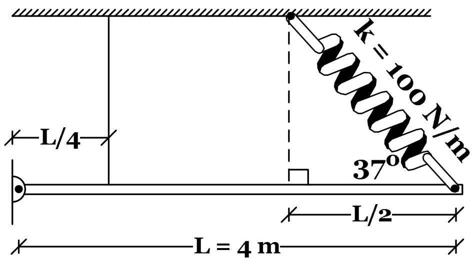


Figura 262

3. El sistema de la figura 263 está en equilibrio. El objeto B tiene una masa de 1.50 kg. Determine las masas de los objetos A, C y D. Los pesos de las barras transversales se consideran despreciables; g = 10 m/s². (Segunda evaluación de Física A, II Término 2006 – 2007).
   Respuesta: m_A = 0.5 kg; m_C = 0.389 kg; m_D = 0.111 kg

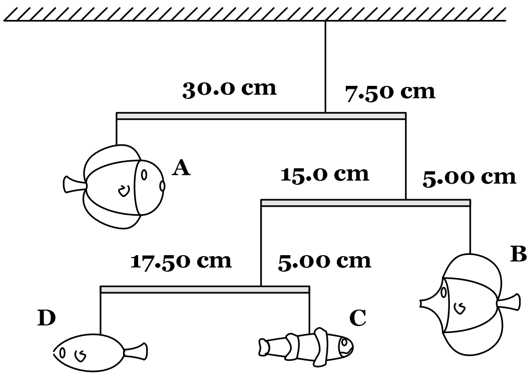


Figura 263

4. Un bloque de 700 N se encuentra sobre una viga uniforme de 200 N y 6.00 m de longitud. EL bloque está a una distancia de 1.00 m del extremo izquierdo de la viga, como se muestra en la figura 264. La cuerda que sostiene la viga forma un ángulo θ = 60° con la horizontal.
   a) Determine la tensión del alambre y las componentes de la fuerza ejercida por la pared sobre el extremo izquierdo de la viga.

b) Si el alambre puede soportar una tensión máxima de 900N, ¿cuál es la distancia máxima x a la que se puede colocar el bloque antes de que se rompa el alambre.

(Segunda evaluación de Física A, I Término 2006 – 2007)

Respuesta: a) T = 250.18 N; V = 683 N; H = 125.1 N; b) 5.82 m

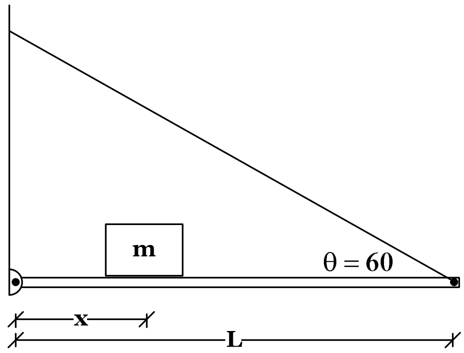


Figura 264

5. Se aplica una fuerza vertical de 300 N al extremo de una palanca de masa despreciable que está articulada en torno del punto O como se muestra en la figura 265. Encuentre:
   a) El momento de la fuerza de 300 N en torno de O.
   b) La magnitud de la fuerza horizontal que aplicada en A produzca el mismo momento respecto a O.
   c) ¿Cuál es la menor fuerza que aplicada en A produce el mismo momento respecto a O?
   d) ¿A qué distancia del eje debe aplicarse una fuerza vertical de 750 N para que produzca el mismo momento respecto a O que tenía la palanca inicialmente en la pregunta a)?

   (Examen de mejoramiento de Física I, I Término 2004 – 2005)

   Respuesta: a) 75 Nm; b) 173.2 N; c) 150 N; d) 0.2 m

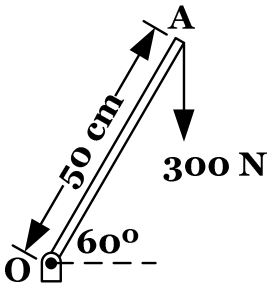


Figura 265

6. Una barra AB de 2 m de longitud y 20 kg está sujeta al techo de una habitación mediante una articulación A. El extremo inferior de la barra B se apoya sobre otra barra inclinada CD, de 5 m de longitud y 45 kg, apoyada en una pared inclinada 60º rugosa (con rozamiento), y una superficie horizontal lisa (sin rozamiento). Encontrar:
   a) La(s) fuerza(s) que ejerce la articulación.
   b) Las reacciones en la pared inclinada y en la superficie horizontal.
   c) La fuerza de rozamiento.
   d) ¿Se mantedrá la barra en equilibrio en la actual posición?

   (Lección parcial de Física I, II Término 2003 – 2004)

   Respuesta: a) 31.5 N; 95.0 N; 190.0 N; b) 277 N; 736 N; c) 237 N; d) Sí.

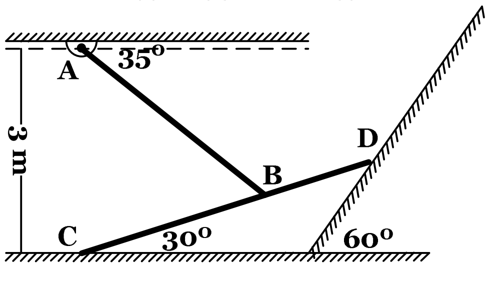


Figura 266

7. Dos cilindros macizos y homogéneos de masas 6 kg y 10 kg respectivamente, se apoyan sin rozamiento sobre los planos inclinados de la figura 267. Encuentre el ángulo ϕ que forma con la horizontal la recta OO' que une los centros de los dos cilindros en la posición de equilibrio, y la reacción de los planos inclinados. (Lección parcial de Física I, I Término 2003 – 2004)
Respuesta: $\phi = 59.3^o$; 57.4 N; 111 N

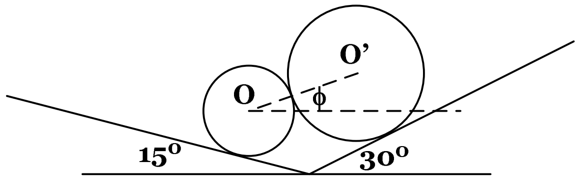


Figura 267

8. La viga uniforme AB de la figura tiene 4 m de largo y tiene una masa de 100 kg. La viga puede rotar alrededor del punto fijo C. La viga reposa en el punto A. Un hombre de masa 75 kg camina a lo largo de la viga partiendo de A. Calcular la máxima distancia que el hombre puede caminar a partir de A manteniendo el equilibrio. Representar la reacción en A como función de la distancia x. (Examen de mejoramiento de Física I, I Término 1990 – 1991)

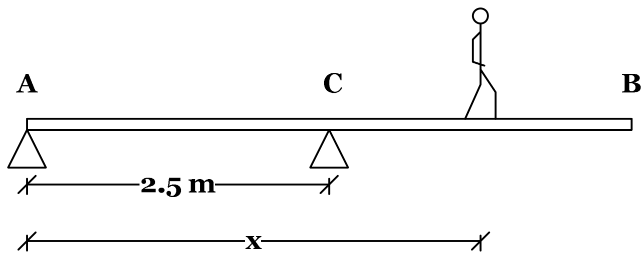


Figura 268

9. La figura 269 muestra una barra homogénea de 400 kg de masa, articulada en el punto A, está en equilibrio por acción de una fuerza F perpendicular al eje de la barra, ejercida por el hombre de 80 kg de masa, la tensión en la cuerda es 1000 N, determinar:
   a) El valor de la fuerza F que ejerce el hombre sobre la viga.
   b) El coeficiente de fricción mínimo que tendría que existir entre el hombre y el suelo.
   (Examen de mejoramiento de Física A, I Término 2005 – 2006)
   Respuesta: a) 1447.41 N; b) 0.36

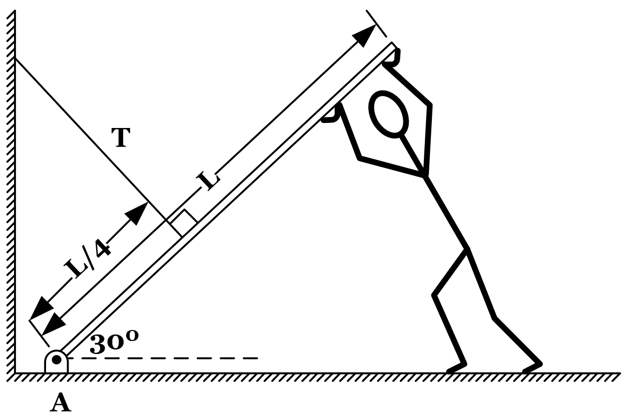


Figura 269

3.2. Torque y conservación de la energía.

Cuando un sistema de partículas está rotando alrededor de un eje de referencia, tiene una energía cinética de rotación, y está dada por

$$K = \frac{1}{2} I\omega^2$$

Donde I es el momento de inercia del sistema, que es el equivalente de la masa en el movimiento de traslación, esto es, la inercia es la capacidad que tiene una partícula o un sistema de partículas para oponerse a cambios de rotación. Podríamos decir que mientras más momento de inercia exista, una partícula o un sistema de partículas tenderán a rotar menos, y viceversa. La velocidad angular es la misma para todo el sistema de partículas. Para una partícula el momento de inercia se define como

$$I = mr^2$$

Donde m es la masa de la partícula y r es la distancia perpendicular que existe desde el eje de rotación hasta donde se encuentra la partícula. Para un sistema de partículas que conforman a un cuerpo sólido se define como

$$I = \int r^2 dm$$

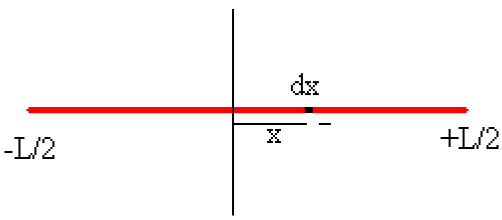
A continuación se presenta la determinación de los momentos de inercia para ciertos sólidos.

Si el eje de rotación no pasa por el centro de masa, se utiliza el Teorema de los ejes paralelos o Teorema de Steiner, que está dado por

$$I = I_{CM} + md^2$$

Aquí I_{CM} es el momento de inercia con respecto al centro de masa, d es la distancia que existe desde el centro de masa hasta el eje de rotación.

Momento de inercia de una varilla



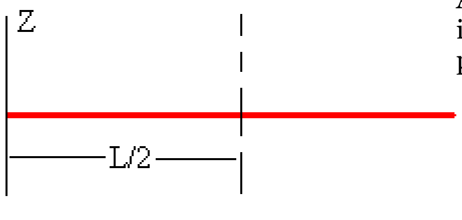
Vamos a calcular el momento de inercia de una varilla de masa *M* y longitud *L* respecto de un eje perpendicular a la varilla que pasa por el centro de masas.

La masa *dm* del elemento de longitud de la varilla comprendido entre *x* y *x+dx* es

$$dm = \frac{M}{L} dx$$

El momento de inercia de la varilla es

$$I_C = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{M}{L} x^2 dx = \frac{1}{12} ML^2$$



Aplicando el teorema de Steiner, podemos calcular el momento de inercia de la varilla respecto de un eje perpendicular a la misma que pasa por uno de sus extremos.

$$I = I_C + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} ML^2$$

Momento de inercia de un disco

Vamos a calcular el momento de inercia de un disco de masa *M* y radio *R* respecto de un eje perpendicular al plano del disco y que pasa por su centro.

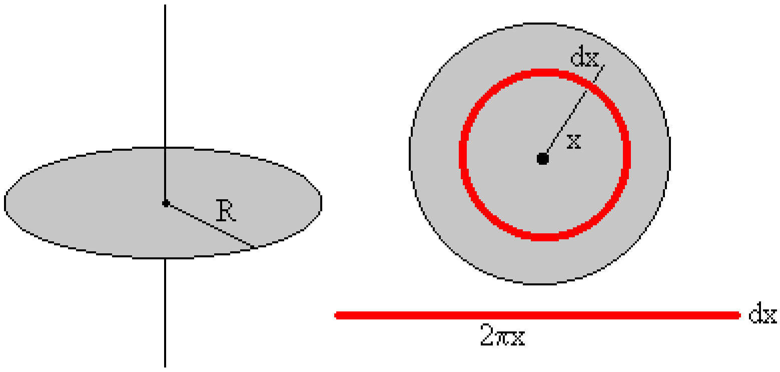


Figura 270

Tomamos un elemento de masa que dista *x* del eje de rotación. El elemento es un anillo de radio *x* y de anchura *dx*. Si recortamos el anillo y lo extendemos, se convierte en un rectángulo de longitud $2\pi x$ y anchura *dx*, cuya masa es

$$dm = \frac{M}{\pi R^2} 2\pi x dx = \frac{2M}{R^2} x dx$$

El momento de inercia del disco es

$$I_C = \int_0^R \frac{2M}{R^2} x^3 dx = \frac{1}{2} MR^2$$

Momento de inercia de un cilindro

Vamos a calcular el momento de inercia de un cilindro de masa *M*, radio *R* y longitud *L* respecto de su eje.

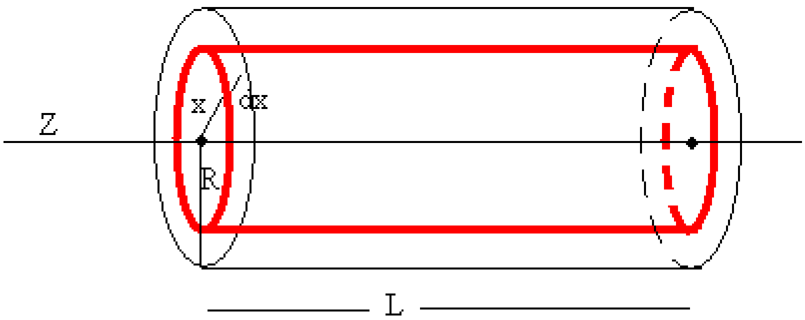


Figura 271

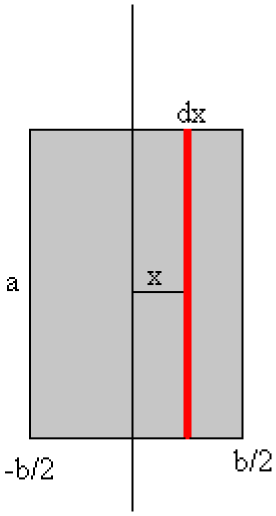
Tomamos un elemento de masa que dista *x* del eje de rotación. El elemento es una capa cilíndrica cuyo radio interior es *x*, exterior *x+dx*, y de longitud *L*, tal como se muestra en la figura. La masa *dm* que contiene esta capa es

$$dm = \frac{M}{\pi R^2 L} 2\pi x dx L = \frac{2M}{R^2} x dx$$

El momento de inercia del cilindro es

$$I_C = \int x^2 dm = \int_0^R \frac{2M}{R^2} x^3 dx = \frac{1}{2} MR^2$$

Momento de inercia de una placa rectangular



Vamos a calcular el momento de inercia de una placa rectangular delgada de masa M de lados a y b respecto del eje que pasa por la placa.

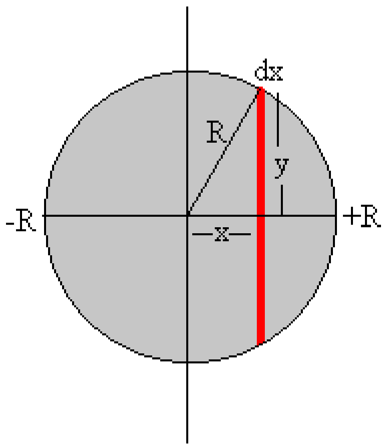
Tomamos un elemento de masa que dista x del eje de rotación. El elemento es un rectángulo de longitud a de anchura dx. La masa de este rectángulo es

$$dm = \frac{M}{ab} a dx = \frac{M}{b} dx$$

El momento de inercia de la placa rectangular es

$$I_C = \int_{-b/2}^{b/2} \frac{M}{b} x^2 dx = \frac{1}{12} Mb^2$$

Momento de inercia de un disco



Vamos a calcular el momento de inercia de un disco de masa M y radio R, respecto de uno de sus diámetros.

Tomamos un elemento de masa que dista x del eje de rotación. El elemento es un rectángulo de longitud $2y$ de anchura dx. La masa de este rectángulo es

$$dm = \frac{M}{\pi R^2} 2y dx$$

El momento de inercia del disco es

$$I_C = \int_{-R}^{R} \frac{M}{\pi R^2} 2x^2 y dx$$

Haciendo el cambio de variable

$x = R \cdot \cos\theta$
$y = R \cdot \text{sen}\theta$

Llegamos a la integral

$$I_C = \frac{2M}{\pi R^2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} R^4 \operatorname{sen}^2\theta \cos^2\theta \cdot d\theta = \frac{MR^2}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 2\theta \cdot d\theta =$$

$$\frac{MR^2}{4\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1-\cos 4\theta)\cdot d\theta = \frac{1}{4}MR^2$$

Momento de inercia de una esfera

Vamos a calcular el momento de inercia de una esfera de masa *M* y radio R respecto de uno de sus diámetros

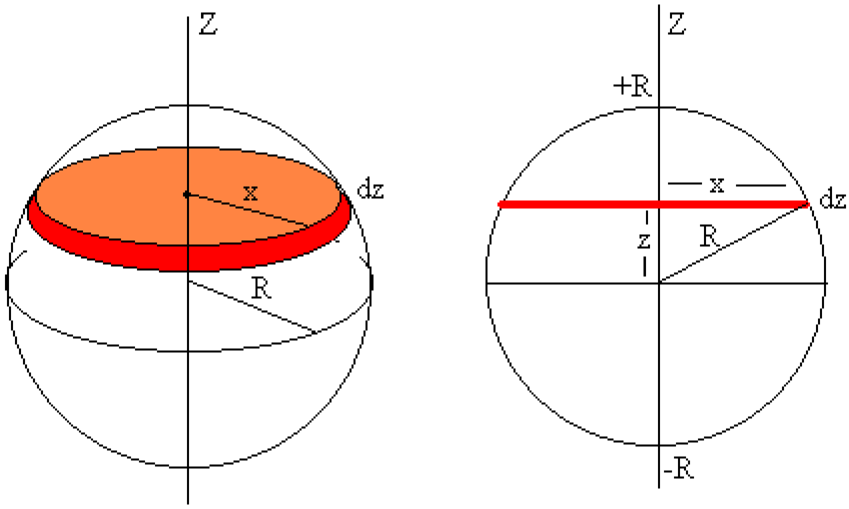


Figura 272

Dividimos la esfera en discos de radio *x* y de espesor *dz*. El momento de inercia de cada uno de los discos elementales es

$$\frac{1}{2}x^2 dm$$

La masa de cada uno de los discos es

$$dm = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}\pi x^2 dz = \frac{3M}{4R^3}x^2 dz$$

El momento de inercia de la esfera, es la suma de los momentos de inercia de todos los discos elementales.

$$I_C = \int \frac{1}{2}x^2 dm = \int_{-R}^{R}\frac{1}{2}x^2\frac{3M}{4R^3}x^2 dz = \frac{3M}{8R^3}\int_{-R}^{R}x^4\, dz$$

Para resolver la integral tenemos que relacionar la variable *x* con la *z*. Como vemos en la figura $x^2+z^2=R^2$

$$I_C = \frac{3M}{8R^3}\int_{-R}^{R}(R^2-z^2)^2\, dz = \frac{3M}{8R^3}\int_{-R}^{R}(R^4+z^4-2R^2z^2)\, dz = \frac{2}{5}MR^2$$

Momento de inercia de un cilindro

Vamos a calcular el momento de inercia de un cilindro de masa *M*, radio *R* y longitud *L*, respecto de un eje perpendicular a su generatriz y que pasa por su centro.

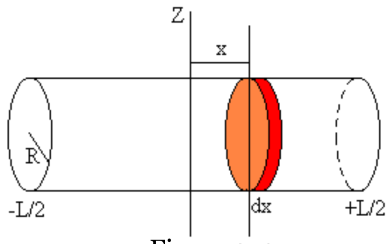


Figura 273

Dividimos el cilindro en discos de radio *R* y espesor *dx*. El momento de inercia de cada uno de los discos respecto de uno de sus diámetros es

$$\frac{1}{4}R^2 dm = \frac{1}{4}R^2 \frac{M}{\pi R^2 L}\pi R^2 dx = \frac{M}{4L}R^2 dx$$

Aplicando el teorema de Steiner, calculamos el momento de inercia de este disco, respecto de un eje paralelo situado a una distancia *x*.

$$\frac{1}{4}R^2 dm + x^2 dm = \left(\frac{1}{4}R^2 + x^2\right)\frac{M}{\pi R^2 L}\pi R^2 dx = \left(\frac{1}{4}R^2 + x^2\right)\frac{M}{L}dx$$

El momento de inercia del cilindro es

$$I_C = \int_{-L/2}^{L/2}\left(\frac{1}{4}R^2 + x^2\right)\frac{M}{L}dx = \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}ML^2$$

Momento de inercia de un paralepípedo

Vamos a calcular el momento de inercia de un paralepípedo de masa *M* y de lados *a*, *b* y *c* respecto de un eje perpendicular a una de sus caras.

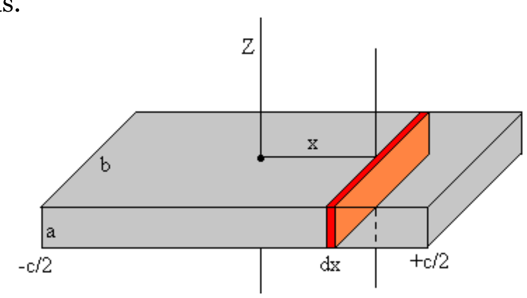


Figura 274

Dividimos el paralepípedo en placas rectangulares de lados *a* y *b* y de espesor *dx*. El momento de inercia de cada una de las placas respecto de su eje de simetría es

$$\frac{1}{12}b^2 dm$$

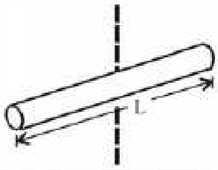
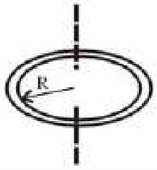
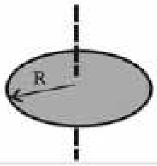
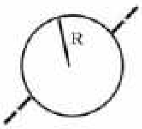
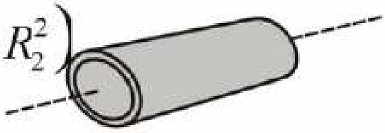
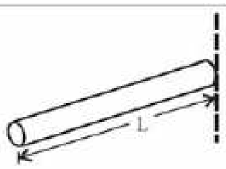
Aplicando el teorema de Steiner, calculamos el momento de inercia de esta placa respecto de un eje paralelo situado a una distancia *x* es

$$\frac{1}{12}b^2 dm + x^2 dm = \left(\frac{1}{12}b^2 + x^2\right)\frac{M}{abc}ab \cdot dx = \left(\frac{1}{12}b^2 + x^2\right)\frac{M}{c}dx$$

El momento de inercia del sólido en forma de paralepípedo es

$$\int_{-c/2}^{c/2}\left(\frac{1}{12}b^2+x^2\right)\frac{M}{c}dx=\frac{M}{12}(b^2+c^2)$$

A continuación se presenta una tabla con los momentos de inercia más utilizados

$\frac{1}{12}ML^2$		*Momento de Inercia de una varilla maciza respecto a un eje perpendicular que pasa por su centro.*
MR^2		*Momento de Inercia de un aro respecto a un eje perpendicular que pasa por su centro.*
$\frac{1}{2}MR^2$		*Momento de Inercia de un disco uniforme respecto a un eje perpendicular que pasa por su centro.*
$\frac{1}{2}MR^2$		*Momento de Inercia de un cilindro macizo uniforme respecto a un eje perpendicular que pasa por su centro.*
$\frac{2}{5}MR^2$		*Momento de Inercia de una esfera maciza uniforme respecto a un eje que pasa por uno de sus diametros.*
$\frac{2}{3}MR^2$		*Momento de Inercia de una esfera hueca uniforme respecto a un eje que pasa por uno de sus diametros.*
$\frac{1}{2}M\left(R_1^2+R_2^2\right)$		*Momento de Inercia de un cilindro hueco uniforme de radio interno R_1 y radio externo R_2 respecto a un eje que pasa por su centro.*
$\frac{1}{3}ML^2$		*Momento de Inercia de una varilla maciza respecto a un eje perpendicular que pasa por uno de sus extremos..*

3.2.1. Ejercicios resueltos.

1. Un yoyo tiene radio exterior 4 cm y eje interno 1 cm de radio. El yoyo es dejado caer mientras se desenrolla (el yoyo rueda, no desliza). Calcule la velocidad lineal del centro de masa y la velocidad angular del yoyo cuando se ha desenrollado 1 cm de la cuerda. (Examen de mejoramiento de Física I, I Término 2002 – 2003).

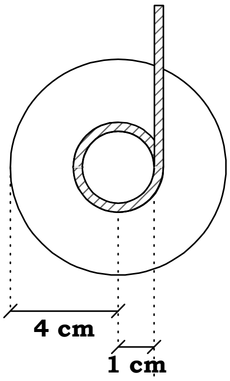


Figura 275

SOLUCIÓN

Podemos resolver el problema de dos maneras distintas, la primera de ellas, utilizando las leyes de Newton, y la segunda, por el método energético.

FORMA I

Planteamos la segunda ley de Newton al sistema, partiendo del diagrama de cuerpo libre mostrado en la figura 451.

$$\sum Fy = m_{TOTAL} a_{CM}$$
$$mg + mg - T = 2ma_{CM}$$
$$2mg - T = 2ma_{CM} \qquad (1)$$

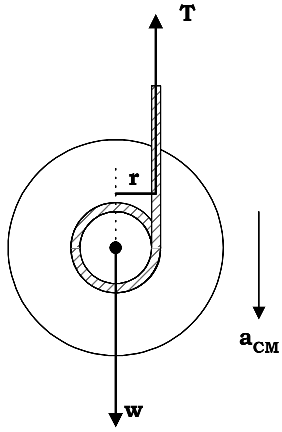


Figura 276

Recuerde que un yoyo está formado por dos tapas en forma de disco, esa es la razón por la que colocamos 2mg como el peso total del yoyo y no solamente mg. Además, la cuerda está generando un torque alrededor del centro de masa del yoyo, por tanto tenemos

$$\sum \tau = I\alpha$$
$$Tr = 2\left(\frac{1}{2}mR^2\right)\left(\frac{a_{CM}}{r}\right)$$
$$T = ma_{CM}\left(\frac{R}{r}\right)^2 \qquad (2)$$

Recuerde que la aceleración angular la tomaremos como la relación de la aceleración del centro a su radio.

De igual manera que en el análisis de la segunda ley de Newton traslacional, en este caso, para el análisis rotacional, consideramos dos discos, por lo tanto el momento de inercia es el doble del momento de inercia de un disco. Reemplazamos ahora la ecuación (2) en la (1).

$$2mg - ma_{CM}\left(\frac{R^2}{r^2}\right) = 2ma_{CM}$$
$$2mg = 2ma_{CM} + ma_{CM}\left(\frac{R^2}{r^2}\right)$$
$$2mg = ma_{CM}\left(2 + \frac{R^2}{r^2}\right)$$
$$a_{CM} = \frac{2gr^2}{2r^2 + R^2}$$
$$a_{CM} = \frac{2(9.8m/s^2)(1cm)^2}{2(1cm)^2 + (4cm)^2}$$
$$a_{CM} = 1.09m/s^2$$

El valor de la velocidad lo calculamos por medio de las ecuaciones de cinemática asumiendo que la aceleración es constante

$$v^2 = v_o^2 + 2a\Delta y$$

$$v^2 = 2(1.09m/s^2)(0.01m)$$

$$v = 0.148 \text{ m/s}$$

$$v = 14.8 \text{ cm/s}$$

FORMA II

Utilizamos la conservación de la energía para el siguiente análisis. Suponemos el nivel de referencia en el punto más bajo del movimiento, o sea luego de recorrido 1 cm, observe la figura 277.

$E_o = E_{FINAL}$

$m_{TOTAL}gh = (\frac{1}{2}m_{TOTAL}v_{CM}^2) + (\frac{1}{2} I_{SISTEMA}\omega^2)$

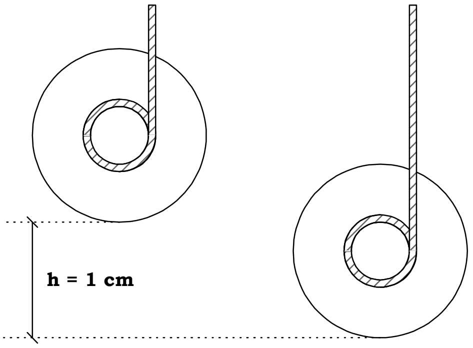


Figura 277

$2m_{TOTAL}gh = m_{TOTAL}\, v_{CM}^2 + I_{SISTEMA}\omega^2$

$2(2m)gh = (2m)\, v_{CM}^2 + 2(\ \frac{1}{2}\ )(mR^2)(\ v_{CM}^2/r^2)$

$2mgh = m\, v_{CM}^2 + \ \frac{1}{2}\,(mR^2)(\ v_{CM}^2/r^2)$

$4mgh = 2m\, v_{CM}^2 + \ (mR^2)(\ v_{CM}^2/r^2)$

$$4mgh = mv_{CM}^2\left(2 + \frac{R^2}{r^2}\right)$$

$$4gh = v_{CM}^2\left(\frac{2r^2 + R^2}{r^2}\right)$$

$$v_{CM} = \sqrt{\frac{4ghr^2}{2r^2 + R^2}}$$

$$v_{CM} = 2r\sqrt{\frac{gh}{2r^2 + R^2}}$$

$$v_{CM} = 2(0.01m)\sqrt{\frac{(9.8m/s^2)(0.01m)}{2(0.01)^2 + (0.04)^2}}$$

$v_{CM} = 0.148$ m/s

2. Los dibujos muestran tres objetos, todos tienen la misma masa y la misma densidad, las dimensiones indicadas en cada uno de los dibujos son iguales. Determine la relación correcta entre los tres momentos de inercia I_A, I_B, I_C, con respecto a un eje de rotación que pasa por el centro de masa de cada uno de los cuerpos. (Examen final de Física I, I Término 2003 – 2004)
   a) $I_C > I_A > I_B$
   b) $I_C = I_B > I_A$
   c) $I_C = I_A > I_B$
   d) $I_B > I_C > I_A$
   e) $I_A = I_B = I_A$

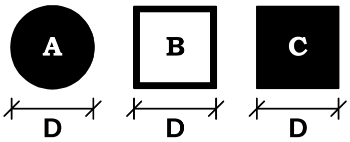


Figura 278

SOLUCIÓN

La relación que existe entre la masa y la inercia en la traslación es equivalente, en la rotación, al momento de inercia y la inercia rotatoria, esto es, a mayor inercia menor es la rapidez con la que rota la partícula (velocidad angular), además sabemos que en forma general que el momento de inercial depende de la distancia de separación con el eje de rotación, o sea, mientras más alejado esté distribuida la masa del eje de rotación mayor será el momento de inercia, por lo tanto mayor momento de inercia tiene el cuerpo B porque la masa está más alejada del centro de masa que es por donde pasa el eje de rotación, posterior al cuerpo B sigue el C en momento de inercia, porque el cuadrado puede contener al círculo y sobra una porción, finalmente, el cuerpo de menor momento de inercia es el cuerpo A.

Respuesta: d)

3. Un cilindro macizo de masa M y radio R rueda sin deslizar hacia la parte más baja de un plano inclinado, que forma un ángulo φ con la horizontal. Encuentre la aceleración de su centro de masa en un instante cualquiera. (Examen Final de Física I, I Término 2001 – 2002)

SOLUCIÓN

Primero realizamos un gráfico que ilustre la situación presentada en el enunciado del problema. En la figura 279 se muestra al cilindro descendiendo por el plano inclinado. En la figura 280 se muestra el diagrama de cuerpo libre del cilindro, en el que se muestran las fuerzas que actúan sobre el cilindro.

Analizamos el movimiento rotacional.

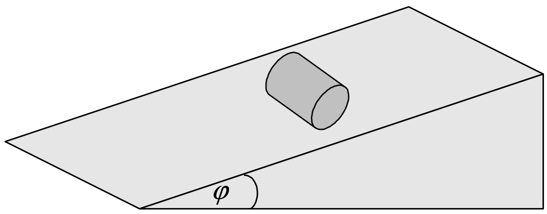


Figura 279

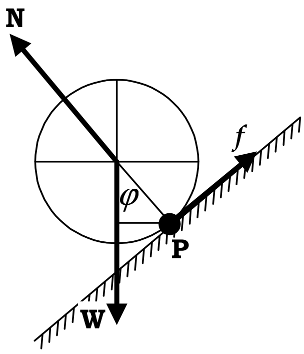


Figura 280

$$\sum \tau = I\alpha$$

$$wD = \left(I_{CM} + md^2\right)\alpha$$

En la ecuación precedente D es el lado opuesto al ángulo φ, por lo tanto podemos usar la función trigonométrica seno. Fíjese que el cilindro no rota por un eje que pase por su centro de masa, por lo tanto el momento de inercia, I, debe ser calculado por medio del teorema de los ejes paralelos o de Steiner. La distancia d que aparece en el teorema de los ejes paralelos es la distancia que existe entre el eje de rotación y el centro de masa del cilindro, o sea, el radio del cilindro, R.

$$mg(Rsen\varphi) = \left(\frac{1}{2}mR^2 + mR^2\right)\left(\frac{a_{CM}}{R}\right)$$

$$\left(\frac{3}{2}mR^2\right)\left(\frac{a_{CM}}{R}\right) = mgRsen\varphi$$

$$a_{CM} = \frac{2}{3}gsen\varphi$$

4. Un cilindro de radio R y masa M rueda por un plano horizontal y al pasar por el punto A, inicio del ascenso a un plano inclinado rugoso, lleva una velocidad angular ω_o. Encuentre la altura a la que llega el cilindro. (Examen de mejoramiento de Física I, II Término 2001 – 2002)

SOLUCIÓN

Realizamos un análisis energético entre el punto A y el punto hasta donde llega como máximo el cilindro.

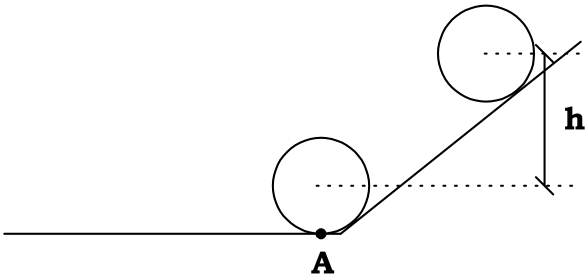


Figura 281

$E_A = E_B$

$K_{ROT} + K_{TRAS} = U$

$½\ I\omega^2 + ½\ mv^2 = mgh$

Debido a que el cilindro gira con respecto a su centro de masa como eje de rotación, no usamos el teorema de los ejes paralelos.

$I\omega^2 + mv^2 = 2mgh$

$(½\ mR^2)\omega_o^2 + m(\omega_o R)^2 = 2\ mgh$

$½\ m\ R^2\omega_o^2 + m\ R^2\omega_o^2 = 2mgh$

$$\frac{3}{2}R^2\omega^2 = 2gh$$

$$h = \frac{3R^2\omega^2}{4g}$$

5. Una barra rígida homogénea, de masa M y longitud L, se suspende del punto O, que está a una distancia x del extremo superior, alrededor del cual puede oscilar libremente. En el otro extremo se encuentra adherida una partícula de masa M/4. Encuentre el momento de inercia del sistema cuando x = L/4. (Examen final de Física I, I Término 1999 – 2000)

SOLUCIÓN

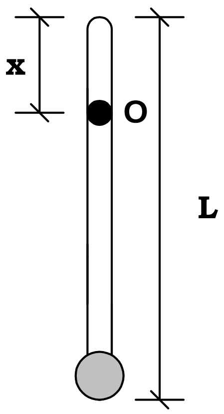


Figura 282

La figura 282 muestra la situación descrita en el enunciado del problema.
El momento de inercia del sistema, I_{SIS}, será igual a

$I_{SIS} = I_{BARRA} + I_{MASA}$

Pero la barra no rota alrededor de su centro de masa, por lo tanto utilizamos el teorema de los ejes paralelos, o sea, $I = I_{CM} + md^2$. Aquí d es la distancia que existe entre el centro de masa y el eje de rotación, o sea d = L/2 – L/4 = L/4. Además el momento de inercia de la masa, que se encuentra en el extremo de la barra, está dado por $I_{MASA} = mr^2$, donde r es la distancia que existe entre el eje de rotación y la posición de la masa m, en este caso esa distancia es L – x, o sea, L – L/4 = ¾ L.

$I_{SIS} = I_{CM} + md^2 + I_{MASA}$

$$I_{SIS} = \left[\frac{1}{12}ML^2 + M\left(\frac{L}{4}\right)^2\right] + \left(\frac{M}{4}\right)\left(L - \frac{L}{4}\right)^2$$

$$I_{SIS} = ML^2\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{16}\right) + \left(\frac{M}{4}\right)\left(\frac{9}{16}L^2\right)$$

$$I_{SIS} = ML^2\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{16} + \frac{9}{64}\right)$$

$$I_{SIS} = \frac{55}{192}ML^2$$

6. Un disco de masa M = 10 kg y radio R = 30 cm, rueda sin deslizar a lo largo de un plano inclinado en 30° con la horizontal. Este es halado por una cuerda desde un eje que está en el centro de masa del disco, esta cuerda pasa por una polea de masa m_2 = 2 kg y radio r = 20 cm, para finalmente a una masa puntual m_1 = 15 kg, como se muestra en la figura. Calcular la velocidad con que llega la masa m_1 al suelo, si el sistema parte del reposo. (Examen final de Física I, II Término 2003 – 2004)

SOLUCIÓN

Utilizaremos dos formas de solución para este ejercicio.

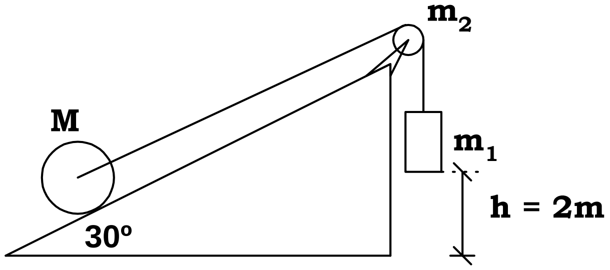


Figura 283

FORMA I

Podemos resolver el problema utilizando la conservación de la energía. En la figura 284 se muestra las dos situaciones, inicial y final, para el movimiento del bloque y el disco.
Tomaremos como referencia a la situación inicial, o sea, las referencias serán el disco y el bloque.

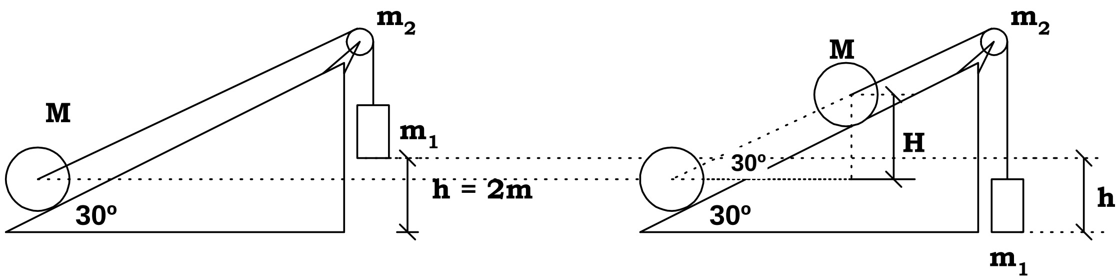


Figura 284

$E_{INICIAL} = E_{FINAL}$

$0 = Ug_{DISCO} + K_{ROTDISCO} + K_{TRASDISCO} + K_{ROTPOLEA} + K_{BLOQUE} + Ug_{BLOQUE}$

La energía potencial gravitacional, Ug, para el disco y el bloque es cero porque la altura con respecto al nivel de referencia es cero. La energía cinética de traslación, K_{TRAS}, y de rotación, K_{ROT}, del disco es cero porque se encuentra en reposo en este nivel, igual ocurre con la energía cinética de traslación del bloque y de rotación de la polea. Por lo tanto la energía mecánica, E, es cero.

$$0 = MgH + \tfrac{1}{2} I_{DISCO}\omega^2 + \tfrac{1}{2} M v_{CM}^2 + \tfrac{1}{2} I_{POLEA}\omega^2 + \tfrac{1}{2} m v_{BLOQUE}^2 - m_1gh$$

Cabe aclara que h es negativa porque está debajo del nivel de referencia, por lo tanto la energía potencial gravitacional del bloque disminuye. H podemos calcularla por funciones trigonométricas. La misma altura h que desciende el bloque, sube el disco por el plano inclinado, o sea, 2m. Por tanto H = hSen30° = 1m. La velocidad angular del disco es igual a la velocidad del centro de masa dividida entre el radio del disco. De igual manera ocurre con la polea.

$$0 = (10kg)\left(9.8\frac{m}{s^2}\right)(1m) + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}\right)(10kg)(0.30m)^2\right]\left(\frac{v_{CM}^2}{(0.30m)^2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)(10kg)v_{CM}^2 + \frac{1}{2}(2kg)(0.20m)^2\left(\frac{v^2}{(0.20m)^2}\right) + \frac{1}{2}(15kg)v^2 - 15kg\left(9.8m/s^2\right)(2m)$$

La velocidad del centro de masa del disco es la misma que la velocidad tangencial de la polea, y la velocidad tangencial de la polea es la misma que la velocidad de descenso del bloque.

$$294 = 98 + 2.5v^2 + 5v^2 + v^2 + 7.5\,v^2$$
$$196 = 16\,v^2$$
$$v = 3.5 \text{ m/s}$$

FORMA II

Podemos también utilizar las leyes de Newton para resolver el problema. En la figura 285 se muestra el diagrama de cuerpo libre para el disco la polea y el bloque.

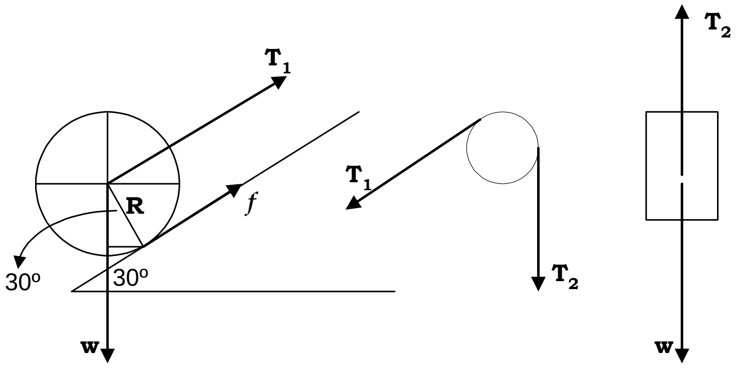


Figura 285

Debido a que la tensión 1 hace que el disco suba, esta genera una aceleración angular, α, por medio de un torque. Aplicando las leyes de Newton, para el movimiento rotacional, tenemos para el disco tenemos la siguiente ecuación

$$\sum \tau = I_{DISCO}\alpha$$
$$T_1R - MgRsen30^{o} = \left(\frac{1}{2}MR^2\right)\left(\frac{a_{CM}}{R}\right)$$
$$T_1 - Mgsen30^{o} = \frac{1}{2}Ma_{CM} \quad (1)$$

Para la polea se presenta la siguiente ecuación

$$\sum \tau = I_{POLEA}\alpha$$
$$T_2r - T_1R = \left(\frac{1}{2}m_2r^2\right)\left(\frac{a_1}{r}\right)$$
$$T_2r - T_1R = \frac{1}{2}m_2ra_1 \quad (2)$$

Para el bloque se presenta la siguiente ecuación

$$\sum Fy = m_1a_1$$
$$m_1g - T_2 = m_1a_1 \quad (3)$$

Por la situación geométrica que se muestra en la figura 456, se puede observar que la aceleración del centro de masa es la misma que la tangencial de la polea, debido a que el centro del disco está conectado tangencialmente con la polea. Asimismo, la aceleración tangencial de la polea es la misma que tiene el bloque. Ahora sumamos las tres ecuaciones.

Multiplicaremos la ecuación (1) por R y la (3) por r para que se puedan cancelar las tensiones.

$$+T_1R - MgRsen30^{o} = \frac{1}{2}MRa$$
$$-T_1R + T_2r = \frac{1}{2}m_2ra$$
$$\underline{m_1gr - T_2r = m_1ra}$$
$$m_1gr - MgRsen30^{o} = \left(\frac{1}{2}MR + \frac{1}{2}m_2r + m_1r\right)a$$
$$15kg\left(9.8m/s^2\right)(0.20m) - 10kg\left(9.8m/s^2\right)(0.30m)0.5 = \left(\frac{1}{2}\times 10kg\times 0.30m + \frac{1}{2}\times 2kg\times 0.20m + 15kg\times 0.20m\right)a$$

a = 3.13m/s²

Con el valor de la aceleración podemos calcular la velocidad del bloque, que será la misma que la del centro de masa del disco por estar todo el sistema conectado.

$$v_f^2 = v_o^2 + 2a\Delta y$$
$$v_f^2 = 0 + 2(3.13\text{m/s}^2)(2\text{m})$$

$$vf = 3.5 \text{ m/s}$$

Resultado que coincide con el anterior que se obtuvo por medio de la conservación de la energía.

7. Un rodillo de 5 cm de radio se deja libre del tope del plano inclinado de altura H = 1 m e inclinación 30° con la horizontal. El rodillo rueda sin deslizar. Encuentre las componentes de la velocidad del centro de masa del rodillo cuando llegue al piso. (Examen final de Física I, I Término 2002 – 2003)

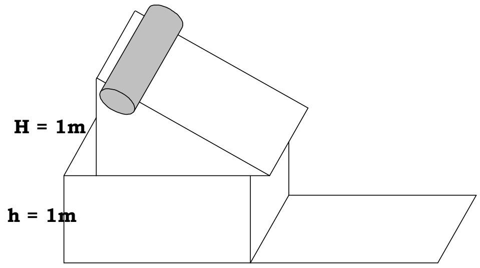


Figura 286

SOLUCIÓN

En la figura 287 se muestra un corte transversal del rodillo mientras cae. A partir de él utilizamos conservación de la energía, para calcular la velocidad con que el rodillo sale del plano inclinado, y comienza a moverse afectado por la aceleración de la gravedad.

Primero analizamos entre el punto de salida (sale el rodillo del reposo) y el fin del plano inclinado.

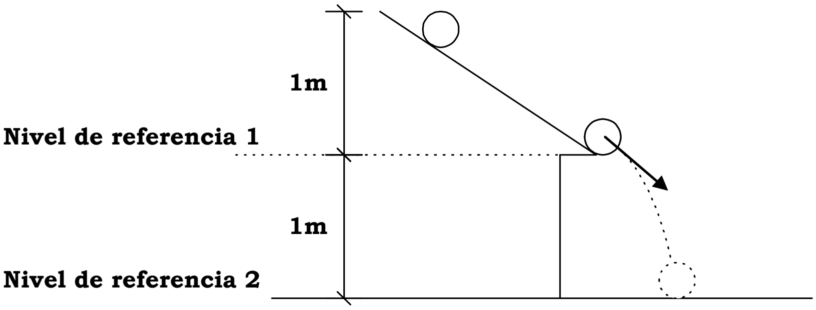


Figura 287

$$E_o = E_{FINAL}$$
$$U_g = K_{ROT} + K_{TRAS}$$
$$mgh = \tfrac{1}{2} I\omega^2 + \tfrac{1}{2} mv^2$$
$$mgh = \tfrac{1}{2}[\tfrac{1}{2} mr^2(v_{CM}^2/r^2)] + \tfrac{1}{2} m v_{CM}^2$$
$$2mgh = \tfrac{1}{2} mr^2(v_{CM}^2/r^2)] + m v_{CM}^2$$
$$4mgh = m v_{CM}^2 + 2 m v_{CM}^2$$
$$4gh = 3 v_{CM}^2$$
$$v_{CM} = 3.61 \text{ m/s}$$

Con esta velocidad calculamos las componentes del movimiento del rodillo al llegar al piso. Recuerde que el movimiento que realiza el rodillo, una vez que sale del plano inclinado es un movimiento parabólico, por lo tanto en el eje de las x tenemos un movimiento rectilíneo uniforme, es decir, la velocidad permanece constante, mientras que en el eje de las y el movimiento es rectilíneo uniformemente variado.

EJE X

$v_{oX} = (3.61 \text{ m/s})\cos 30° = 3.31 \text{ m/s}$

EJE Y

$v_f^2 = v_{oY}^2 + 2ay\Delta y$

$v_{fY}^2 = [(3.61\text{m/s})\text{sen}30°]^2 + 2(-9.8\text{m/s}^2)(-1\text{m})$

$v_{fY} = 4.78 \text{ m/s}$

8. El disco que aparece en la figura 288 tiene una masa de 14 kg y está unido a un resorte de constante elástica k = 30 N/m y una longitud no estirada de 30 cm. Si el disco se libera desde el reposo, cuando se halla en la posición que se ilustra y rueda sin deslizar, determine la velocidad angular cuando recorre 1.0 m. (Deber de conservación de la energía y momento rotacionales, I Término 2003 – 2004)

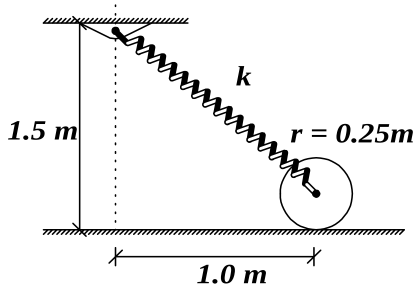


Figura 288

SOLUCIÓN

Utilizamos directamente la conservación de la energía para el punto de donde sale el disco y para el punto que pasa justamente debajo del punto de sujeción del resorte.

$E_o = E_{FINAL}$
$Ue_o = K_{ROT} + K_{TRAS} + Ue_{FINAL}$
$\frac{1}{2} k x_0^2 = \frac{1}{2} I\omega^2 + \frac{1}{2} m v_{CM}^2 + \frac{1}{2} k x_{FINAL}^2$

Aquí x_o es la longitud inicial que se encuentra estirado el resorte, o sea $x_o = L - L_o$. Para la situación mostrada en la figura 460, se nota perfectamente que el valor x_o debemos calcularlo por medio del Teorema de Pitágoras; x_{FINAL} es la longitud que se encuentra estirado el resorte cuando el disco pasa justo debajo del eje de sujeción del resorte, o sea, $x_{FINAL} = 1.5\text{ m} - 0.30\text{ m} = 1.2\text{ m}$.

$L^2 = (1.0\text{ m})^2 + (1.5\text{m})^2$
$L = 1.8\text{ m}$
$x_o = 1.8\text{ m} - 0.30\text{ m} = 1.5\text{ m}$

Con estos datos adicionales determinamos la velocidad angular.

$\frac{1}{2} k x_0^2 = \frac{1}{2} I\omega^2 + \frac{1}{2} m\omega^2R^2 + \frac{1}{2} k x_{FINAL}^2$
$(30\text{N/m})(1.5\text{m})^2 = \frac{1}{2} (14\text{kg})(0.25\text{m})^2\omega^2 + (14\text{kg})(0.25\text{m})^2\omega^2 + (30\text{N/m})(1.2\text{m})^2$
$24.3 = 1.31\omega^2$

$\omega = 4.31\text{ rad/s}$

9. El sistema de tres elementos que aparece en la figura 289 consta de un bloque B de 6 kg, un disco D de 10 kg y un cilindro C de 12 kg. Una cuerda continua de masa despreciable se enrolla en el cilindro, pasa sobre el disco y se amarra en el bloque. Si el bloque se mueve hacia abajo con una velocidad de 0.8 m/s y el cilindro gira sin resbalar, encuentre la energía cinética del sistema en ese momento. (Lección de Física I, II Término 1999 – 2000)

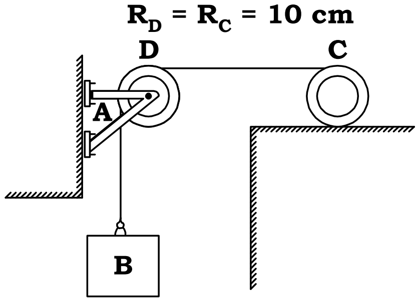


Figura 289

SOLUCIÓN

Al igual que en los ejercicios anteriores, realizamos el análisis energético del sistema. En ese instante el bloque desciende con una cierta energía cinética, K_{BLOQUE}, la polea rota, generando de esta manera una energía cinética rotacional, K_{ROTP}, el cilindro se traslada y rota, por lo tanto existe una energía cinética de traslación, K_{TRASC}, y una energía cinética de rotación, K_{ROTC}. Tome en cuenta que la velocidad tangencial de la polea es la misma velocidad del bloque y del disco. Pero la velocidad que utilizamos en la energía cinética traslacional y rotacional del disco es la del centro de masa del disco. Por la geometría del disco se puede verificar que la velocidad tangencial del disco es el doble de la del centro de masa.

$K_{TOTAL} = K_{BLOQUE} + K_{ROTP} + K_{TRASC} + K_{ROTC}$

$K_{TOTAL} = ½\ m_{BLOQUE}v^2 + ½\ I_{POLEA}\,\omega^2_{POLEA} + ½\ m_{DISCO}\,v^2_{CM} + ½\ I_{DISCO}\,\omega^2_{DISCO}$

$K_{TOTAL} = ½[m_{BLOQUE}v^2 + ½(m_{POLEA}\,R^2_{POLEA})(v^2/\,R^2_{POLEA}) + (m_{DISCO}\,R^2_{DISCO})(v_{CM}^2/\,R^2_{DISCO}) + ½\,(m_{DISCO}\,R^2_{DISCO})(v_{CM}^2/\,R^2_{DISCO})]$

$K_{TOTAL} = ½[6kg(0.8m/s)^2 + ½\,(12kg)(0.8m/s)^2 + 10kg(0.8m/s/2)^2 + ½\,(10kg)(0.8m/s/2)^2]$

$K_{TOTAL} = ½\,[3.84 + 3.84 + 1.6 + 0.8]$

$$K_{TOTAL} = 5.04\ J$$

10. En la posición A el sistema está en reposo y el resorte no está deformado. Se hace girar el volante hasta que el bloque haya ascendido sobre el plano liso una distancia d, instante en el que se suelta a partir del reposo. Encuentre la velocidad del bloque en el instante en que pasa nuevamente por A. (Lección de Física I, I Término 2004 – 2005)

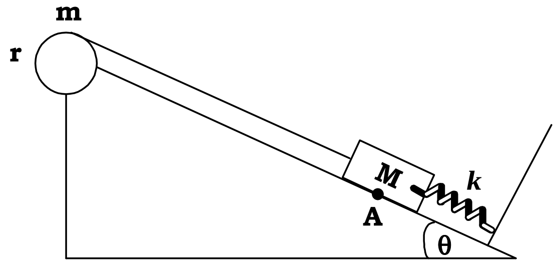


Figura 290

SOLUCIÓN

En la figura 291 se muestra la situación inicial y final del movimiento del sistema.

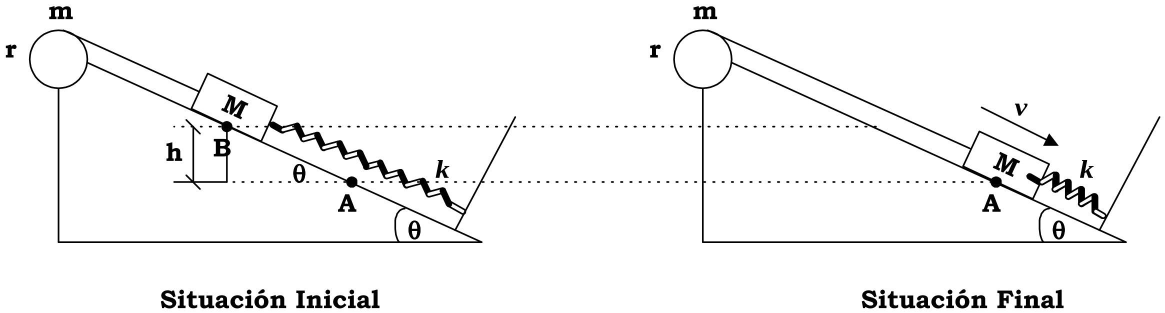


Figura 291

Debido a que no existen fuerzas disipativas, la energía mecánica se conserva, por lo tanto,

$$E_o = E_{FINAL}$$
$$Ug_B + Ue_B = K_{ROTPOLEA} + K_{BLOQUE}$$
$$Mgh + \tfrac{1}{2} kx^2 = \tfrac{1}{2} I\omega^2 + \tfrac{1}{2} Mv^2$$
$$2Mgh + kx^2 = I\omega^2 + Mv^2$$

Aquí h está relacionada con la distancia d que existe entre los puntos A y B, se forma un triángulo rectángulo, con ángulo de inclinaciónθ, por lo tanto $h = d\text{sen}\theta$. La longitud x que se elonga (estira) el resorte es exactamente igual a d. La velocidad angular, ω, es producida por la velocidad tangencial que causa el movimiento del bloque hacia abajo del plano inclinado. Reemplazando estos valores en la ecuación anterior, tenemos.

$2Mgd\text{sen}\theta + kd^2 = (\tfrac{1}{2} mr^2)(v^2/r^2) + Mv^2$ Reemplazo de h, x, I y ω en la ecuación anterior

$2(2Mgd\text{sen}\theta + kd^2) = mv^2 + 2Mv^2$ Multiplicamos la ecuación por 2.

$2d(2Mg\text{sen}\theta + kd) = (m + 2M)v^2$ Extraemos el factor común d y v^2.

$$v = \sqrt{\frac{2d(2Mgsen\theta + kd)}{m + 2M}}$$ Despejamos la velocidad, v.

11. Un disco de 2 kg de masa y 30 cm de radio rueda sin deslizar a lo largo de un plano horizontal. Una cuerda enrollada a una hendidura hecha en el disco, de radio 15 cm, está unida a través de una polea en forma de disco de masa 0.5 kg, a un bloque de masa 10 kg, que pende (cuelga) del extremo de la misma tal como se indica en la figura 292. Calcule:
    a. La aceleración del bloque, del centro de masa del disco y las tensiones en las cuerdas.
    b. La velocidad del bloque una vez que haya descendido 5 m, partiendo del reposo.
    (Deber de dinámica rotacional, I Término 2003 – 2004)

SOLUCIÓN

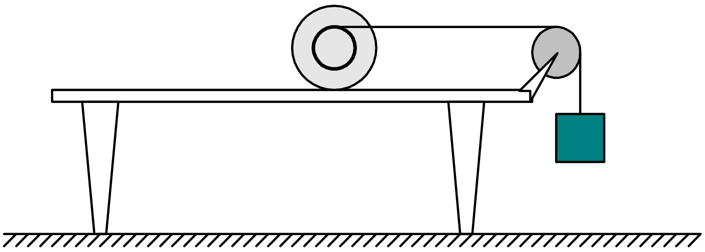
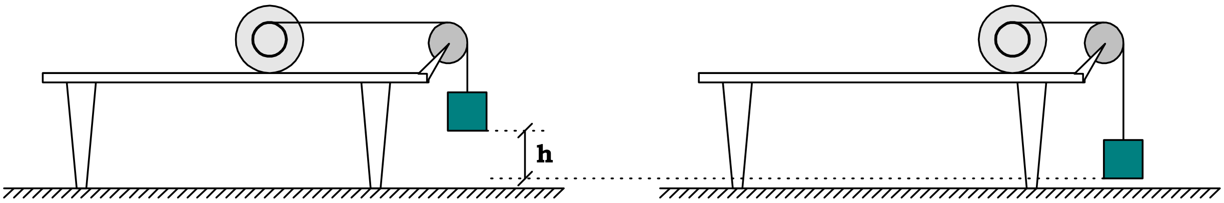


Figura 292

Haremos los cálculos por dos medios distintos. El primero de estos caminos es el análisis energético, y el otro es el análisis de las leyes de Newton.

I FORMA



Situación inicial **Situación Final**

Figura 293

Al descender el bloque, genera rotación de la polea, la misma que a su vez genera rotación en el disco. En la figura 293 se muestran ambas situaciones. La referencia se toma en el punto más bajo del movimiento del bloque.

$E_o = E_{FINAL}$ Conservación de la energía

$Ug_B = K_B + K_P + K_{TRASD} + K_{ROTD}$ Energías existentes en cada situación.

$m_Bgh = ½\ m_Bv^2 + ½\ I_Pw^2 + ½\ m_Dv_{CM}^2 + ½\ I_Dw^2$ Reemplazo de las ecuaciones de cada tipo de energía.

Con respecto al punto de contacto en el piso, la altura a la que se encuentra la hendidura del disco es 45 cm, porque existen 30 cm hasta el radio de la parte externa del disco y 15 cm del radio de la hendidura, o sea esa altura h es igual a "tres medios" el radio del disco, por lo que la aceleración tangencial de la cuerda es 3/2 de la aceleración del centro de masa, y lo mismo ocurre con la velocidad del centro de masa, o sea la velocidad tangencial de la cuerda y, consecuentemente la del bloque es 3/2 la del centro de masa del disco.

$2m_Bgh = m_Bv^2 + I_Pw^2 + m_Dv_{CM}^2 + I_Dw^2$ Multiplicamos la ecuación por 2.

$$2m_Bgh = m_B\left(\frac{3}{2}v_{CM}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}m_Pr_P^2\right)\left(\frac{v_P}{r_P}\right)^2 + m_Dv_{CM}^2 + \frac{1}{2}m_Dr_D^2\left(\frac{v_{CM}}{r_D}\right)^2$$

Reemplazamos el valor de la velocidad tangencial por la del centro de masa.

$$2m_Bgh = m_B\left(\frac{9}{4}v_{CM}^2\right) + \frac{1}{2}m_P\left(\frac{3}{2}v_{CM}\right)^2 + m_Dv_{CM}^2 + \frac{1}{2}m_Dv_{CM}^2$$

Simplificación de los radios y reemplazo de la velocidad tangencial de la polea por la relación con la velocidad del centro de masa

$$2m_Bgh = m_B\left(\frac{9}{4}v_{CM}^2\right) + \frac{1}{2}m_P\left(\frac{9}{4}v_{CM}^2\right) + m_Dv_{CM}^2 + \frac{1}{2}m_Dv_{CM}^2$$

Desarrollo de la potencia.

$$16m_Bgh = 18m_Bv_{CM}^2 + 9m_Pv_{CM}^2 + 8m_Dv_{CM}^2 + 4m_Dv_{CM}^2$$

Multiplicamos la ecuación por 8.

$$16m_Bgh = (18m_B + 9m_P + 8m_D + 4m_D)v_{CM}^2$$

Extraemos el factor común.

$$v_{CM}=\sqrt{\frac{16m_Bgh}{18m_B+9m_P+12m_D}}$$ Despejamos v_{CM}.

$$v_{CM}=\sqrt{\frac{16(10kg)(9.8m/s^2)(5m)}{18(10kg)+9(0.5kg)+12(2kg)}}$$ Reemplazamos los datos del problema.

$$v_{CM} = 6.13\ m/s^2$$

La velocidad del bloque es 3/2 la del centro de masa, o sea,

$$v_B = 9.20\ m/s$$

La aceleración la podemos calcular por medio de la ecuación $v^2 = v_0^2 + 2a\Delta y$

Para el centro de masa

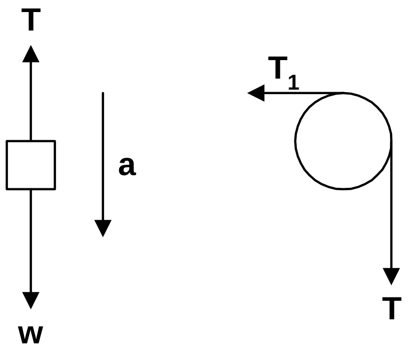
$$6.13^2 = 0 + 2a_{CM}(5)$$

$$a_{CM} = 3.76\ m/s^2$$

Para el bloque

$$9.20^2 = 0 + 2a_B(5)$$
$$a_B = 8.46\ m/s^2.$$

Para calcular las tensiones utilizamos las leyes de Newton, en función de los diagramas de cuerpo libre del bloque y de la polea.



$\sum Fy = ma$ Segunda Ley de Newton
mg – T = ma para el bloque.
$10kg(9.8\ m/s^2) – 10kg(8.46m/s^2) = T$

$T = 13.4\ N$

$\sum \tau = I\alpha$ Segunda Ley de Newton
$Tr – T_1r = (½\ mr^2)(a/r)$
$T – T_1 = (½)ma$
$13.4\ N – ½\ (0.5kg)(8.46m/s2) = T_1$

$T_1 = 11.28\ N$

Figura 294

FORMA II
Realizamos el diagrama de cuerpo libre para cada uno de los cuerpos, vea la figura 295.

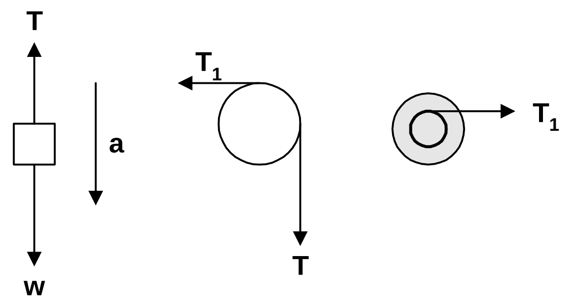


Figura 295

Para el bloque tenemos la ecuación

$\sum Fy = ma$ Segunda Ley de Newton para el bloque.
mg – T = ma Reemplazamos las fuerzas de acuerdo con la aceleración.
98 – T = 10a (1) Reemplazamos los datos del problema.

Para el disco tenemos

$\sum \tau = I\alpha$ Segunda Ley de Newton para la rotación

$T_1R = (½\ mr^2 + md^2)(a_{CM}/r)$ Aplicación del Teorema de los ejes paralelos, donde d es la distancia que existe desde el eje de rotación hasta el centro de masa, o sea, r. Además $R = (3/2)r$

$T_1(3/2)r = (½\ mr^2 + mr^2)(a_{CM}/r)$

$T_1(3/2)r = 3/2(mr^2)(a_{CM}/r)$ Sumamos los términos semejantes

$T_1 = m(2/3)a$ Por la geometría del sistema $a = 3/2\ a_{CM}$.

$T_1 = 2kg(2/3)a$ Reemplazamos los datos del ejercicio.

$T_1 = (4/3)a$ (2) Se realiza la multiplicación.

Para la polea tenemos

$\sum \tau = I\alpha$ Segunda Ley de Newton para la polea

$Tr - T_1r = (½\ mr^2)(a/r)$ Reemplazo del torque y del momento de inercia.

$T - T_1 = (½)ma$ Simplificamos los radios.

$T - T_1 = (½)(0.5kg)a$ Reemplazamos los datos del problema.

$T - T_1 = 0.25a$ Resolvemos el producto.

Sumamos ahora las tres ecuaciones anteriores.

$98 - T = 10a$ (1)

$T_1 = (4/3)a$ (2)

$T - T_1 = 0.25a$ (3)

$98 = 11.58a$

$$a = 8.46\ m/s^2$$

Aceleración que fue exactamente la misma que obtuvimos en el método anterior.
Con esta aceleración calculamos la tensión T en la ecuación (1)

$$98 - 10(8.46) = T$$
$$T = 13.4\ N$$

Y también calculamos la tensión T_1.

$$13.4 - 0.25(8.46) = T_1$$
$$T_1 = 11.28\ N$$

Los otros valores los calculamos a partir de estos resultados. Verifíquelos.

12. En el gráfico m_1 = 2 kg y m_2 = 6kg y están conectados mediante una cuerda sin masa que pasa por una polea que tiene forma de disco con un radio R = 0.25 m y masa M = 10 kg. El coeficiente de fricción cinético es 0.36 para ambos bloques. Calcular la aceleración de los bloques y la tensión en las cuerdas. (Lección de Física I, I Término 2000 – 2001)

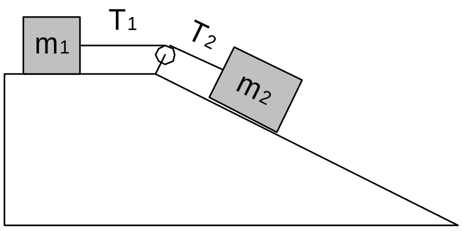


Figura 296

SOLUCIÓN

Primero hacemos un diagrama de cuerpo libre para los dos bloques y para la polea (vea la figura 297, 298 y 299), posteriormente aplicamos la segunda ley de Newton para la traslación y la rotación.

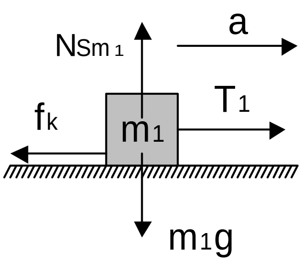


Figura 297

$$\sum Fx = m_1 a$$
$$T_1 - f_{k_1} = m_1 a$$
$$T_1 - \mu_k N_{Sm_1} = m_1 a$$
$$T_1 - \mu_k m_1 g = m_1 a \qquad (1)$$

$$\sum Fy = 0$$
$$N_{Sm_1} - m_1 g = 0$$
$$N_{Sm_1} = m_1 g$$

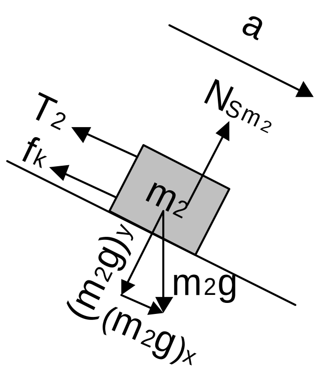


Figura 298

$$\sum Fy = 0$$
$$N_{Sm_2} - m_2 g Cos30° = 0$$
$$N_{Sm_2} = m_2 g Cos30°$$

$$\sum Fx = m_2 a$$
$$(m_2 g)_X - T_2 - f_{k_2} = m_2 a$$
$$m_2 g Sen30° - T_2 - \mu_k N_{Sm_2} = m_2 a$$
$$m_2 g Sen30° - T_2 - \mu_k m_2 g Cos30° = m_2 a \qquad (2)$$

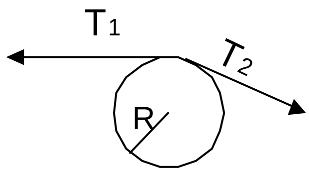


Figura 299

$$\sum \tau = I\alpha$$
$$T_2 R - T_1 R = \left(\frac{1}{2} MR^2\right)\left(\frac{a}{R}\right)$$
$$T_2 - T_1 = \frac{1}{2} Ma \qquad (3)$$

Sumando las ecuaciones (1), (2) y (3) tenemos

$$m_2 g Sen30° - \mu_k m_2 g Cos30° - \mu_k m_1 g = (m_1 + m_2 + M)a$$
$$a = \frac{m_2 g Sen30° - \mu_k m_2 g Cos30° - \mu_k m_1 g}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2} M}$$

$$a = 0.309 m/s^2$$

De la ecuación (1) calculamos T_1

$$T_1 = m_1(a + \mu_k g)$$

$$T_1 = 7.67\,[N]$$

Calculamos T_2 de la ecuación (3)

$$T_2 = T_1 + \frac{1}{2}Ma$$

$$T_2 = 9.21\,[N]$$

13. El bloque M_2 de la figura 300 recorre 4m en 2s, partiendo desde el reposo. Determine:
    a) La aceleración del bloque M_1.
    b) El momento de inercia de la polea compuesta.
    c) La tensión de la cuerda T

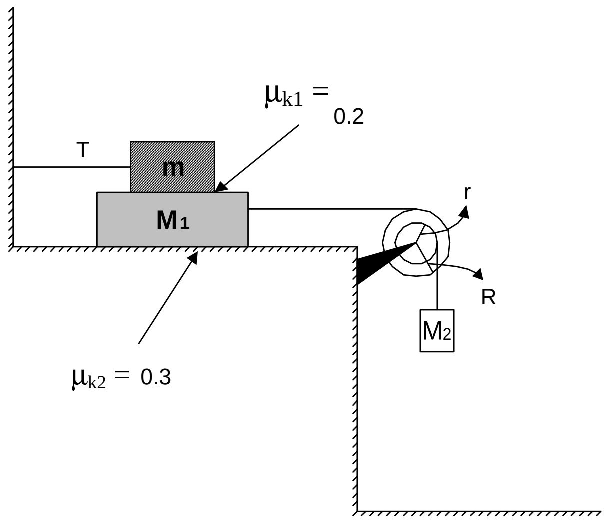


Figura 300

SOLUCIÓN
Realizamos un diagrama de cuerpo libre para los tres bloques y la polea.

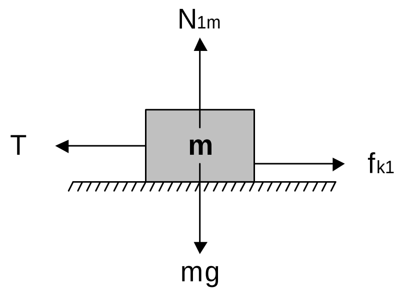


Figura 301

$$\sum Fx = 0$$
$$f_{k_1} - T = 0$$
$$\mu_{k_1} N = T$$
$$\mu_{k_1} mg = T$$
$$T = 1.96 \ [N]$$

$$\sum Fy = 0$$
$$N_{1m} - mg = 0$$
$$N_{1m} = mg$$

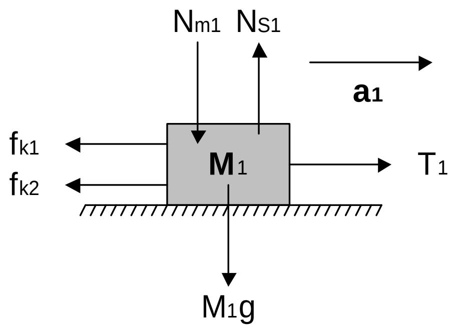


Figura 302

$$\sum Fx = M_1 a_1$$
$$T_1 - f_{k1} - f_{k2} = M_1 a_1$$
$$T_1 - T - \mu_{k2} N_{S1} = M_1 a_1$$
$$T_1 - T - \mu_{k2}(M_1 + m)g = M_1 a_1 \quad (1)$$

$$\sum Fy = 0$$
$$N_{S1} - N_{m1} - M_1 g = 0$$
$$N_{S1} = N_{m1} + M_1 g$$

La aceleración a_1 es producida por la tensión T_1. La polea tiene la misma aceleración tangencial a_1. Además, la polea compuesta en toda su extensión tiene la misma aceleración angular

$$a_1 = \alpha R$$
$$a_2 = \alpha r$$

$$\frac{a_1}{R} = \frac{a_2}{r}$$
$$a_1 = \left(\frac{a_2}{r}\right)R \qquad (2)$$

La aceleración a_2 la podemos calcular por cinemática

$$\Delta y = V_{0y}t + \frac{1}{2}a_2 t^2$$
$$a_2 = \frac{2\Delta y}{t^2}$$

Reemplazamos el último resultado en la ecuación (2)

$$a_1 = \left(\frac{R}{r}\right)\left(\frac{2\Delta y}{t^2}\right)$$

$$a_1 = 3.33\ m/s^2$$

Reemplazando el valor de a_1 en la ecuación (1) podemos calcular T_1

$$T_1 = T + \mu_{k2}(M_1 + m)g + M_1 a_1$$

$$T_1 = 36.25 \quad [N]$$

Para calcular la otra tensión nos valemos del diagrama de cuerpo libre del bloque M_2.

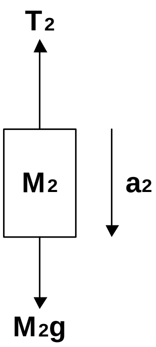
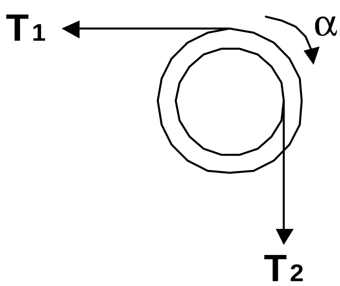


Figura 303

$$\sum Fy = M_2 a_2$$
$$M_2 g - T_2 = M_2 a_2$$
$$T_2 = M_2\left(g - \frac{2\Delta y}{t^2}\right)$$

$$T_2 = 62.4 \quad [N]$$

El momento de inercia de la polea compuesta lo calculamos por medio de la segunda ley de Newton para la rotación.



$$\sum \tau = I\alpha$$
$$T_2 r - T_1 R = I\left(\frac{a_2}{r}\right)$$
$$I = \frac{T_2 r^2 - T_1 R r}{a_2}$$

$$I = 0.014\ kg \bullet m^2$$

Figura 475

3.2.2 Ejercicios propuestos

1. Los tres objetos mostrados son uniformes, tienen la misma masa, y tienen la misma dimensión exterior. ¿Cuál tiene el momento de inercia más pequeño alrededor de un eje que pasa a través de su centro como se muestra?
   a) El cilindro sólido.
   b) El cilindro hueco.
   c) El sólido rectangular.
   d) Todos tienen el mismo momento de inercia.
   (Segunda evaluación de Física A, I Término 2007 – 2008)
   Respuesta: a)

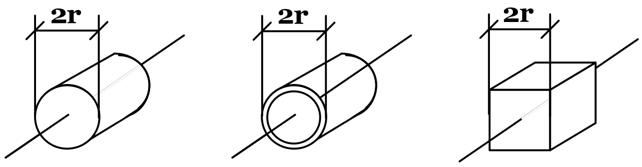


Figura 304

2. Un yoyo es colocado sobre una superficie horizontal como se muestra en la figura 305. Hay fricción suficiente para que el yoyo ruede sin deslizar. Si la rueda es halada hacia la derecha como se muestra,
   a) El yoyo rueda hacia la derecha.
   b) El yoyo rueda hacia la izquierda.
   c) El yoyo permanece en reposo.
   d) La respuesta depende de la magnitud de la fuerza F ejercida por la cuerda comparada con la magnitud de la fuerza de fricción.
   (Segunda evaluación de Física A, I Término 2007 – 2008)
   Respuesta: a)

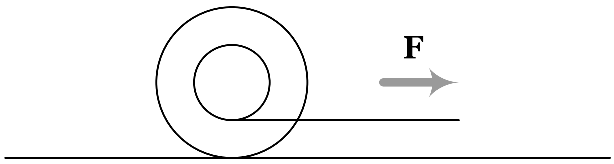


Figura 305

3. Calcular el momento de inercia de una varilla plana de longitud L y masa M respecto a un eje que pasa por su centro y está inclinado 45º, según se ve en la figura 306.
   (Segunda evaluación de Física A, I Término 2007 – 2008)
   Respuesta: $\frac{1}{24}ML^2$

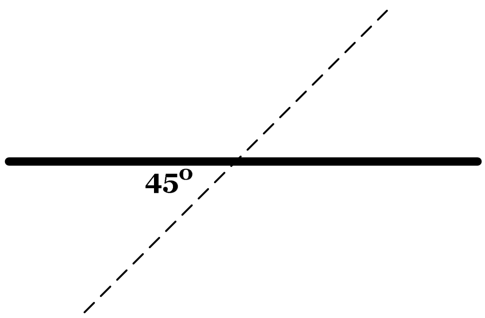


Figura 306

4. Un bloque de masa m = 20 kg, unido mediante una cuerda a una polea sin masa desliza a lo largo de una mesa horizontal con coeficiente de rozamiento cinético $\mu_k = 0.1$. La polea está conectada mediante otra cuerda al centro de un carrete cilíndrico de masa M = 5 kg, y radio R = 0.1 m que rueda sin deslizar a lo largo de un plano inclinado 30º. $I_{CILINDRO} = ½ MR^2$.
   a) Relacionar la aceleración del bloque y del centro de masa del cilindro.
   b) Calcular la aceleración del centro de masa del cilindro y las tensiones de la cuerda.
   (Segunda evaluación de Física A, I Término 2007 – 2008)
   Respuesta: a) $a_{CARRETE} = 2a_{BLOQUE}$; b) 1.176 m/s²; 15.68N; 31.36 N.

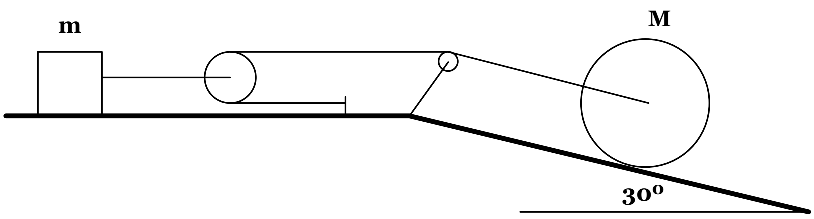


Figura 307

5. Una bola de boliche tiene una masa M, radio R y un momento de inercia 2/5 MR^2. Si rueda por la pista sin deslizar con una velocidad v de su centro de masa, su energía total será:
   a) 3/8 Mv^2
   b) 7/10 Mv^2
   c) 8/5 Mv^2
   d) 3/7 Mv^2
   e) Ninguna
   (Lección de Física A, I Término 2007 – 2008)
   Respuesta: b)

6. Desde la parte superior de un plano inclinado un ángulo θ = 37º se suelta desde el reposo un cilindro hueco, de radio interior r = 0.20 m y radio exterior R = 0.40 m, para que su centro de masa descienda una altura H = 6.00 m hasta llegar al suelo. Encuentre la velocidad angular con la que el cilindro llega al suelo. $I_{CM} = ½ m(r^2 + R^2)$. (Segunda evaluación de Física A, II Término 2006 – 2007)
   Respuesta: 21.3 rad/s

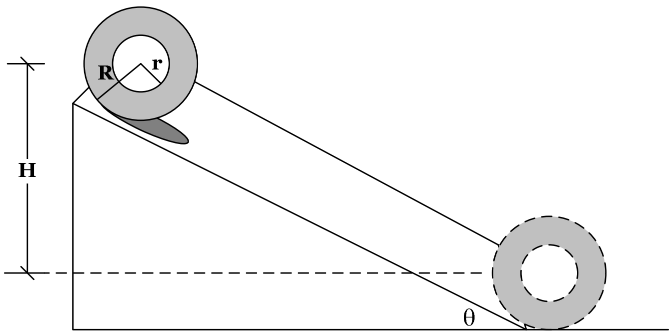


Figura 308

7. Una canica de masa m y radio r rueda a lo largo de la rugosa pista con lazo que se muestra en la figura 309.
   a) ¿Cuál es el valor mínimo de la altura vertical h que la canica debe caer si ha de alcanzar el punto más alto del lazo sin dejar la pista? Exprese su respuesta en términos de r y R. ***Nota:*** *Observe que el centro de masa de la canica se encuentra inicialmente a una altura h + r de la base del lazo.*
   b) Si h = 3R, determine la magnitud de la fuerza normal que actúa sobre la canica al llegar a la base del lazo.
   (Tercera evaluación de Física A, I Término 2006 – 2007)
   Respuesta: a) $\frac{27}{10}(R-r)$; b) $\left(\frac{37R-7r}{7}\right)mg$

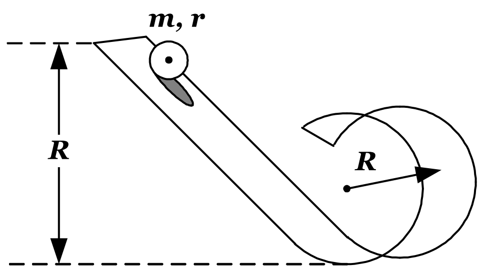


Figura 309

8. Una persona hala un carrete, que rueda sin deslizar, de 30.0 kg (Rext = 50.0 cm; Rint = 30.0 cm) con una fuerza horizontal de 2.0 N, como se muestra en la figura 310. Encuentre:
   a) La aceleración del centro de masa.
   b) La magnitud y dirección de la fuerza de fricción que actúa sobre el carrete.
   c) La velocidad del punto A, luego que el carrete se ha desplazado 2.0 m, suponiendo que partió desde el reposo.

   (Tercera evaluación de Física A, I Término 2006 – 2007)
   Respuesta: a) 0.358 m/s^2 ; b) 9.25 N; c) 2.4m/s

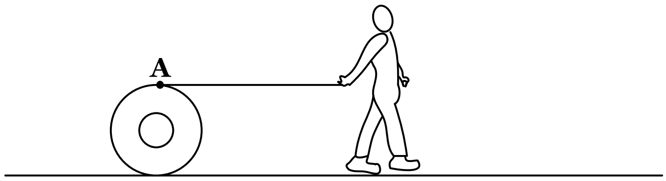


Figura 310

9. Un bloque de 3.0 kg se encuentra sobre una superficie rugosa inclinada 30º y está unido a una polea de 30 kg y 0.20 m de radio a través de una cuerda de masa despreciable. El coeficiente de fricción cinético entre el bloque y la superficie es 0.40 y el sistema se encuentra en reposo en t = 0. Encuentre:
   a) La aceleración con que desciende el bloque.
   b) La aceleración angular de la polea.
   c) La velocidad angular de la polea en t = 2 s.
   d) El trabajo que realizo la tensión de la cuerda sobre la polea cuando el bloque ha descendido 1.0 m sobre el plano.

   (Tercera evaluación de Física A, I Término 2006 – 2007)
   Respuesta: a) 1 m/s^2; b) 5 rad/s^2; c) 10 rad/s; d) – 1.52 J

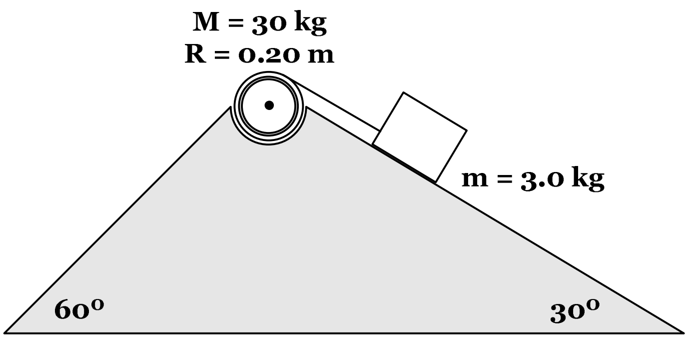


Figura 311

10. El sistema consta de una esfera sólida de masa M = 20 kg y radio R = 10 cm que gira alrededor de un eje vertical fijo que pasa por su centro de masa, y en cuyo ecuador tiene enrollada una cuerda, la cual pasa a través de una polea cilíndrica de masa m2 = 5 kg y radio r = 5 cm, hasta conectarse de masa m1 = 10 kg, como se muestra en la figura 312. Si el sistema parte del reposo, determine la velocidad angular de la esfera cuando el bloque haya descendido 2 m.

    (Examen final de Física I, I Término 2004 – 2005)
    Respuesta: 43.7 rad/s.

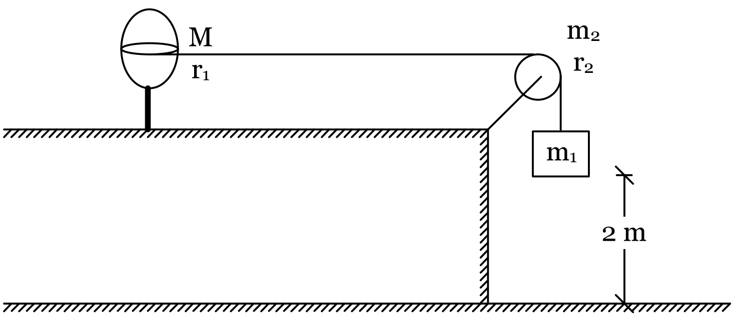


Figura 312

11. En la figura 313 se muestra una esfera de masa M = 2 kg y una polea cilíndrica de masa m = 0.5 kg, unidas por una cuerda de masa despreciable. Inicialmente el sistema está en reposo y se lo suelta repentinamente. ¿Qué velocidad angular adquiere la esfera después de descender 10 m sin deslizar a lo largo del plano inclinado?
(Examen final de Física I, I Término 2004 – 2005)
Respuesta: 26.72 rad/s

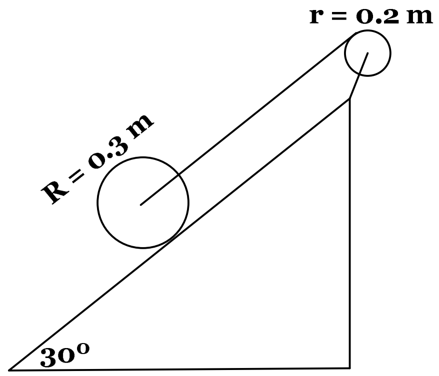


Figura 313

12. Un cilindro sólido (M = 4.0 kg; R = 0.50 m) está unido a u bloque (m = 6.0 kg) a través de una polea compuesta (I_P = 0.1 kg·m^2 r1 = 0.10 m; r2 = 0.20 m) como se muestra en la figura 314. El cilindro rueda sin deslizar. Realice los diagramas de cuerpo libre y encuentre:
a) La aceleración angular de la polea compuesta.
b) La aceleración del centro de masa del cilindro.
c) La aceleración del bloque.
(Examen de mejoramiento de Física I, II Término 2002 – 2003)
Respuesta: a) 29.4 rad/s; b) 2.94 m/s^2; c) 5.88 m/s^2.

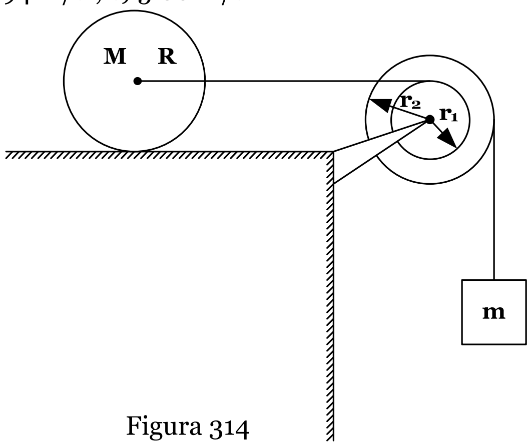


Figura 314

13. El disco y el tambor acoplados que se observa en la figura 315 están bajo el efecto de una fuerza P = 490 N que siempre permanece horizontal. Suponiendo que el disco rueda sin deslizar, determine la aceleración del centro de masa y la fuerza de fricción requerida (magnitud y dirección). (Lección # 3 de Física I, I Término 2003 – 2004).
Respuesta: a) 2.16 m/s^2; b) 411.55 N paralela al plano inclinado y hacia arriba.

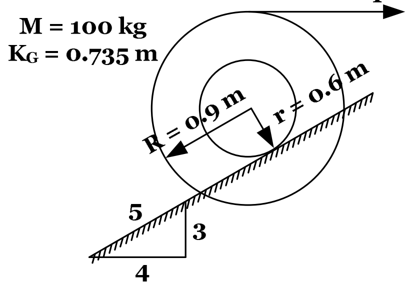


Figura 315

14. Una esfera sólida (r = 5 cm) rueda sin resbalar en el interior de una superficie semiesférica (R = 55 cm) como se indica en el gráfico. Si parte del reposo en A, calcular la rapidez de la esfera cuando pasa por el punto B. (Examen de mejoramiento de Física I, I Término 2000 – 2001).
Respuesta: 2.64 m/s

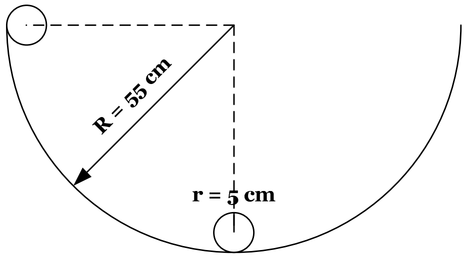


Figura 316

3.3. Momentum angular y conservación del momentum angular.

Cuando se aplica una fuerza a una partícula o a un sistema de partículas se puede provocar un movimiento de traslación o un movimiento de rotación si esta fuerza se aleja de un eje de rotación.

De igual forma una fuerza puede cambiar la cantidad de movimiento lineal, y este cambio puede ser pequeño o grande, dependiendo de la fuerza aplicada o del tiempo de contacto de esta fuerza. El momentum lineal se conserva cuando la fuerza neta es cero.

En la rotación el equivalente de la fuerza, esto es, el torque o momento de fuerza provoca un cambio en la velocidad angular, este cambio es el equivalente del momentum lineal, o sea, el momentum angular o cantidad de movimiento angular. Si el torque neto es cero, el momentum angular se conserva. El momentum angular, $\vec{L}$, se define para una partícula como

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Donde $\vec{r}$ es la posición de la partícula y $\vec{p}$ es la cantidad de movimiento lineal de la misma. La ecuación anterior puede quedar de la siguiente manera

$$\vec{L} = \vec{r} \times \left(m\vec{v}\right)$$
$$\vec{L} = m\left(\vec{r} \times \vec{v}\right)$$

Y la magnitud de esta cantidad física es

$$L = (mv)(r)(sen\theta)$$

En la ecuación precedente se observa que se genera momentum angular para ángulos distintos de 0º y 180º. Por esto se sugiere descomponer la velocidad o la posición de manera que se forme entre sí un ángulo de 90º. Para un sistema de partículas o un cuerpo sólido la cantidad de movimiento angular se define como

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

La cantidad de movimiento angular se conserva cuando la suma de torques externos al sistema es cero, o sea,

$$L_{INICIAL} = L_{FINAL}$$

3.3.1. Ejercicios resueltos

1. Una persona está de pie en el centro de una plataforma circular (sin fricción) manteniendo sus brazos extendidos horizontalmente con una pesa en cada mano. Está girando alrededor de un eje vertical con rapidez angular de 3.0 rad/s. El momento de inercia de la persona más los de la plataforma y las pesas extendidas es de 4.5 kgm^2. Cuando la persona acerca las pesas a su cuerpo el momento de inercia disminuye a 2.2 kgm^2.
   a) ¿Cuál es la nueva rapidez angular de la plataforma?
   b) ¿Cuál es la variación de la energía cinética experimentada por el sistema?
   (Deber # 5 de Física I, II Término 2004 – 2005)

SOLUCIÓN

a) Debido a que no existe torque externo se conserva la cantidad de movimiento angular (momentum angular).

$L_{INICIAL} = L_{FINAL}$

$I_{INICIAL}\omega_{INICIAL} = I_{FINAL}\omega_{FINAL}$

$(4.5\ kgm^2)(3.0 rad/s) = (2.2\ kgm^2)(\omega_{FINAL})$

$\omega_{FINAL} = 6.14\ rad/s$

b) La variación de energía cinética es la energía cinética final menos la energía cinética inicial.

$\Delta K = K_{FINAL} - K_{INICIAL}$

$\Delta K = ½\ I_{FINAL}\omega^2_{FINAL} - ½\ I_{INICIAL}\omega^2_{INICIAL}$

$\Delta K = ½\ (2.2kgm^2)(6.14rad/s)^2 - ½\ (4.5kgm^2)(3.0rad/s)^2$

$\Delta K = 21.22\ J$

2. Un disco de 2 kg de masa y 10 cm de radio gira alrededor de su eje a 180 r.p.m. Encima, pero sin que exista contacto, se encuentra otro disco de 1 kg de masa, del mismo radio y en reposo. Cuando el disco superior se deja caer, ambos se mueven con la misma velocidad angular. Calcule la frecuencia angular final del sistema. (Deber # 6 de Física A, I Término 2006 – 2007)

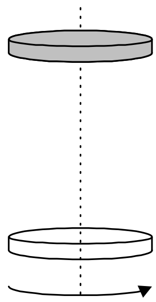


Figura 317

SOLUCIÓN

Al no existir torque externo al sistema, se conserva la cantidad de movimiento angular (momentum angular). En la figura 318 se muestra la situación descrita en el enunciado del problema.

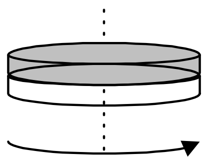


Figura 318

$L_{INICIAL} = L_{FINAL}$

$I_{INICIAL}\omega_{INICIAL} = I_{FINAL}\omega_{FINAL}$

$½\ m_1R^2\ \omega_{INICIAL} = (½\ m_1R^2 + ½\ m_2R^2)\omega_{FINAL}$

$½\ m_1R^2\ \omega_{INICIAL} = ½R^2(m_1 + m_2)\omega_{FINAL}$

$\omega_{FINAL} = \omega_{INICIAL}\ m_1/(m_1 + m_2)$

En el ejercicio nos dan como dato la frecuencia del primer disco, 180 r.p.m, y la rapidez angular está relacionada con la frecuencia como $\omega = 2\pi f$. Con esta relación podemos encontrar la frecuencia final.

$2\pi f_{FINAL} = 2\pi f_{INICIAL}\ m_1/(m_1 + m_2)$

$f_{FINAL} = 180\ r.p.m\ (2kg)/(2kg + 1kg)$

$f_{FINAL} = 120\ r.p.m$

3. Dos discos sólidos idénticos colisionan horizontalmente y quedan pegados después del choque. El primer disco inicialmente tiene velocidad v_o y rota con velocidad angular ω_o, mientras que el segundo está inicialmente en reposo. Los discos están perfectamente alineados con respecto al eje de rotación.
   a) ¿Cuál es la magnitud y dirección del momentum lineal del sistema de los dos discos, luego de la colisión?
   b) ¿Cuál es la magnitud y dirección del momentum angular del sistema de los dos discos después de la colisión?
   c) ¿Cuál es la pérdida de la energía del sistema de los dos discos durante la colisión?
   (Examen de mejoramiento de Física I, I Término 2004 – 2005)

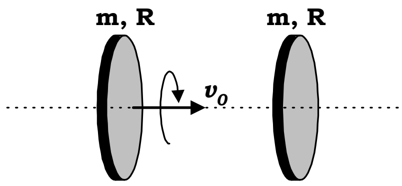


Figura 319

<u>SOLUCIÓN</u>

a) Se conserva la cantidad de movimiento lineal, al no existir fuerza externa alguna que actúe sobre el sistema.

$$p_{\text{SISTEMA ANTES}} = p_{\text{SISTEMA DESPUÉS}}$$
$$mv_o = p_{\text{SISTEMA DESPUÉS}}$$

La dirección se mantiene constante, al igual que la magnitud. La velocidad final del sistema es

$$mv_o = (m + m)v$$
$$v = \tfrac{1}{2} v_o$$

b) Al no existir torque externo se conserva la cantidad de movimiento angular.

$$L_{\text{SISTEMA ANTES}} = L_{\text{SISTEMA DESPUÉS}}$$
$$I\omega_o = L_{\text{SISTEMA DESPUÉS}}$$
$$\tfrac{1}{2} mR^2\omega_o = L_{\text{SISTEMA DESPUÉS}}$$

La dirección de la cantidad de movimiento angular después de la colisión tiene la misma dirección que la inicial. La velocidad angular final del sistema se calcula a continuación.

$$\tfrac{1}{2} mR^2\omega_o = I_{\text{SISTEMA DESPUÉS}}\omega$$
$$\tfrac{1}{2} mR^2\omega_o = 2(\tfrac{1}{2} mR^2)\omega$$
$$\omega = \tfrac{1}{2} \omega_o$$

c) La pérdida de energía es la diferencia entre la energía cinética antes de la colisión y después de la colisión.

$$K_{FINAL} - K_{INICIAL} = (\tfrac{1}{2} m_{SISTEMA}v^2_f + \tfrac{1}{2} I_{SISTEMA}\omega^2_f) - (\tfrac{1}{2} mv^2_o + \tfrac{1}{2} I\omega^2_o)$$
$$K_{FINAL} - K_{INICIAL} = \tfrac{1}{2} (2m)(\tfrac{1}{2} v_o)^2 + (\tfrac{1}{2})\, 2(\tfrac{1}{2} mR^2)(\tfrac{1}{2} \omega_o)^2 - (\tfrac{1}{2} mv^2_o + \tfrac{1}{2} (\tfrac{1}{2} mR^2\omega^2_o))$$
$$K_{FINAL} - K_{INICIAL} = \tfrac{1}{2} (2m(\tfrac{1}{4} v_o^2) + (\tfrac{1}{2})\, 2(\tfrac{1}{2} mR^2)(\tfrac{1}{4}\omega_o^2) - (\tfrac{1}{2} mv^2_o + \tfrac{1}{4} mR^2\omega^2_o)$$
$$K_{FINAL} - K_{INICIAL} = [\tfrac{1}{2} (m)(\tfrac{1}{2} v_o^2) + (\tfrac{1}{2})(mR^2)(\tfrac{1}{4}\omega_o^2)] - (\tfrac{1}{2} mv^2_o + \tfrac{1}{4} mR^2\omega^2_o)$$
$$K_{FINAL} - K_{INICIAL} = [\tfrac{1}{4} mv_o^2 + (1/8)mR^2\omega_o^2] - \tfrac{1}{2} mv^2_o - \tfrac{1}{4} mR^2\omega^2_o$$
$$K_{FINAL} - K_{INICIAL} = -\tfrac{1}{4} mv_o^2 - (1/8)\, mR^2\omega^2_o = -(\tfrac{1}{4} mv_o^2 + 1/8\, mR^2\omega^2_o)$$

Note que el cambio de la energía cinética es negativa y de magnitud igual a la energía cinética final.

$$K_{FINAL} - K_{INICIAL} = -K_{FINAL}$$
$$2K_{FINAL} = K_{INICIAL}$$

Si comparamos la energía cinética final e inicial tendremos en porcentaje la energía perdida.

$$\% \text{ Energía} = (K_{FINAL} / K_{INICIAL}) * 100\ \% = (K_{FINAL} / 2\, K_{FINAL}) * 100\ \% = 50\%$$

4. Una mujer cuya masa es de 60 kg. se encuentra en el extremo de una plataforma giratoria horizontal que tiene un momento de inercia de 500kg.m² y un radio de 2m.el sistema está inicialmente en reposo, y la plataforma es libre de girar sobre un eje vertical sin fricción que pasa por su centro. La mujer comienza a caminar alrededor del borde con una velocidad constante de 1.5m/s respecto al suelo de la plataforma. La velocidad angular de la plataforma es
(Deber # 6 de Física A, I Término 2006 – 2007)
a) 0.36 rad/s b) 0.24 rad/s c) 0.72 rad/s d) 0.18 rad/s

SOLUCIÓN
Debido a que no existe torque externo sobre el sistema, se conserva la cantidad de movimiento angular del sistema.

$$L_{SISTEMA\ ANTES} = L_{SISTEMA\ DESPUÉS}$$
$$0 = L_{MUJER\ DESPUÉS} + L_{PLATAFORMA\ DESPUÉS}$$
$$0 = mvr + I\omega$$
$$0 = mvr + (mr^2 + I_{PLATAFORMA})\omega$$
$$0 = (60\ kg)(1.5\ m/s)(2\ m) + [(60kg)(4m^2) + 500\ kgm^2]\omega$$
$$\omega = -\ 0.24\ rad/s$$

El signo negativo indica que la dirección de la rotación de la plataforma es opuesta a la dirección en la que camina la mujer.
Respuesta: b)

5. Un joven de 50.6 kg de masa está de pie sobre el borde de un tiovivo sin fricción de 827 kg de masa y 3.72 m de radio. El joven lanza una piedra de 1.13 kg en una dirección horizontal y tangente al borde exterior del tiovivo. La velocidad de la piedra, con respecto al piso es 7.82 m/s. Si el tiovivo inicialmente se encontraba en reposo, calcule:
   a) La velocidad angular del tiovivo, luego del lanzamiento de la piedra, y,
   b) La velocidad tangencial del joven, después de haber lanzado la piedra. Suponga que el tiovivo es un disco uniforme.

   (Deber # 6 de Física I, I Término 2004 – 2005)

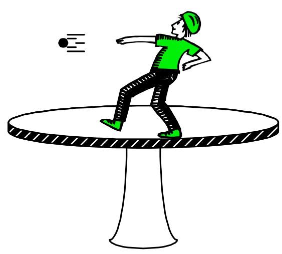


Figura 320

SOLUCIÓN
a) Al no existir un torque externo que cambie la cantidad de movimiento angular, este se conserva, o sea, el Momentum angular inicial es igual al Momentum angular final.

$L_{ANTES} = L_{DESPUÉS}$	No existe torque externo, se conserva el Momentum angular
$0 = L_{PIEDRA} + L_{TIOVIVO}$	Reemplazamos por la suma del Momentum individual
$0 = pr + I\omega$	Se reemplaza el Momentum de una partícula y el de un cuerpo sólido rígido

$$0 = m_{PIEDRA}vr + (I_{JOVEN} + I_{DISCO})\omega$$
$$0 = m_{PIEDRA}vr + (m_J r^2 + \tfrac{1}{2} m_{DISCO}r^2)\omega$$
$$\omega = -\frac{m_{PIEDRA}vr}{m_{JOVEN}r^2 + \frac{1}{2}m_{DISCO}r^2}$$
$$\omega = -\frac{m_{PIEDRA}v}{\left(m_{JOVEN} + \frac{1}{2}m_{DISCO}\right)r} = -\frac{(1.13kg)(7.82n/s)}{[50.6kg + 0.5(827kg)](3.72m)}$$
$$\omega = -5.12x10^{-3} rad/s$$

El signo negativo significa que el movimiento del tiovivo será opuesto al movimiento de la piedra.

b)

$v = \omega r$	Utilizamos la relación entre la velocidad tangencial y la angular
$v = (5.12x10^{-3}\ rad/s)(3.72m)$	Reemplazamos los datos del problema.
$v = 1.90x10^{-2}\ m/s$	
$v = 1.90\ cm/s$	Sabemos que 100 cm equivalen a 1 m.

6. La barra de masa m y longitud L es soltada desde el reposo sin girar. Cuando cae una distancia L, el extremo A golpea el gancho S, que proporciona una conexión permanente. Determine la velocidad angular, ω, de la barra después de girar 90º. Considere el peso de la barra durante el impacto como una fuerza no impulsiva. (Deber # 6 de Física I, I Término 2004 – 2005)

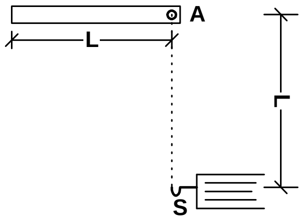


Figura 321

SOLUCIÓN

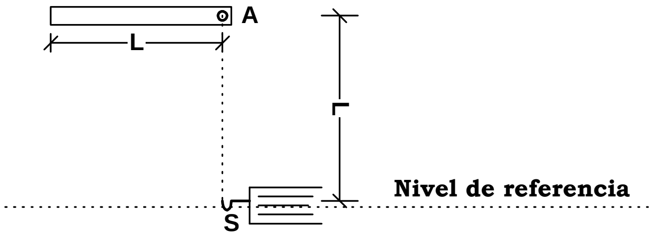


Figura 322

La figura 322 muestra el sistema con el nivel de referencia en la parte más baja del movimiento de la barra hasta que hace contacto con el gancho S. Utilizamos la conservación de la energía para calcular la rapidez con la que llega la barra al gancho.

$E_A = E_S$ — Se conserva la energía al no haber fuerzas disipativas.

$mgh = ½\ mv_S^2$ — En el punto A sólo hay energía potencial y en S cinética.

$v_S = \sqrt{2gL}$ — Despeje de v y reemplazo de h.

$L_{INICIAL} = L_{FINAL}$ — Al chocar la barra con el gancho y no existir torque externo se conserva el momentum angular.

$mvr = I\omega$ — Al no existir rotación antes del choque se considera una partícula a la barra, luego del choque existe rotación.

$$mv\left(\frac{L}{2}\right)=\left[\frac{1}{12}mL^2+m\left(\frac{L}{2}\right)^2\right]\omega$$

Consideramos para el análisis al centro de masa de la barra y utilizamos el teorema de los ejes paralelos.

$$mv\left(\frac{L}{2}\right)=\frac{1}{3}mL^2\omega$$

Se desarrolla la parte interna del paréntesis.

$$\frac{3v}{2L}=\omega$$

Despejamos la velocidad angular.

Analizamos la última situación por medio de la conservación de la energía.

$E_{FINAL} = E_{INICIAL}$

$½\ I\omega_f^2 = ½\ I\omega_o^2 + mgh$

$I\omega_f^2 = I\omega_o^2 + 2mgh$

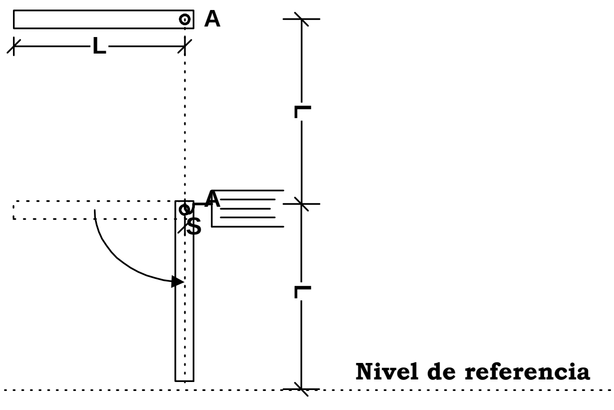


Figura 323

$$\frac{1}{3}mL^2\omega_f^2 = \frac{1}{3}mL^2\omega_0^2 + 2mg\left(\frac{L}{2}\right)$$

$$L\omega_f^2 = L\omega_0^2 + 3g$$

$$L\omega_f^2 = L\left(\frac{3v}{2L}\right)^2 + 3g$$

$$L\omega_f^2 = \frac{9v^2}{4L} + 3g$$

$$L\omega_f^2 = \frac{9\left(\sqrt{2gL}\right)^2}{4L} + 3g$$

$$L\omega_f^2 = \frac{9(2gL)}{4L} + 3g$$

$$L\omega_f^2 = \frac{9g}{2} + 3g$$

$$L\omega_f^2 = \frac{15g}{2} \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{15g}{2L}}$$

7. Una bala de masa m = 10 g que lleva una velocidad de 100 m/s, dirigida como se muestra en la figura 324, choca contra un disco sólido uniforme de masa M = 1 kg y radio R = 20 cm que puede girar libremente sobre un pivote sin fricción que pasa por un punto de su borde. Después del choque la bala se queda incrustada en el centro del disco. Determine:
   a) La velocidad angular del sistema después del choque; y,
   b) La energía perdida en la colisión.
   (Lección parcial de Física I, I Término 2002 – 2003)

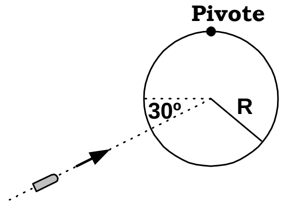


Figura 324

SOLUCIÓN

a) Debido a que no existe torque externo, se conserva la cantidad de movimiento angular (momentum angular).

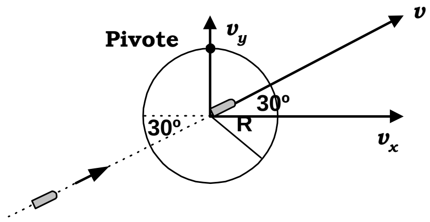


Figura 325

$L_{INICIAL} = L_{FINAL}$

$m_{BALA}v_xr = I\omega$

$mv_{BALA}(\text{Cos}30^o)R = (½MR^2 + Md^2)\omega$

$mv_{BALA}(\text{Cos}30^o)R = (½MR^2 + MR^2 + mR^2)\omega$

$mv_{BALA}(\text{Cos}30^o)R = [(3/2)MR^2 + mR^2]\omega$

$(10g)(100m/s)\cos 30^o = [(3/2)(1kg) + 0.01kg](0.2)\omega$

$\omega = 2.87$ rad/s

b) La energía perdida en la colisión es la diferencia de las dos energías cinéticas, la final menos la inicial, esto es, la energía cinética de rotación, ½ $I\omega^2$, luego del impacto de la bala en el disco menos la energía cinética de traslación de la bala, ½mv^2 , antes de la colisión.

$K_{FINAL} - K_{INICIAL} = ½\ I\omega^2 - ½\ mv^2$

$K_{FINAL} - K_{INICIAL} = ½\ (3/2MR^2 + mR^2)\omega^2 - ½\ mv^2$

$K_{FINAL} - K_{INICIAL} = ½\ R^2(3/2M + m)\omega^2 - ½\ mv^2$

$K_{FINAL} - K_{INICIAL} = ½\ \{(0.2m)^2(1.5x1kg + 0.01\ kg)(2.87rad/s)^2 - (0.01kg)(100m/s)^2\}$

$K_{FINAL} - K_{INICIAL} = -\ 49.75$ J

3.3.2. Ejercicios propuestos

1. Una barra homogénea horizontal está en equilibrio y puede rotar libremente en el plano vertical. Repentinamente es chocada plásticamente por una masa puntual m = 0.5 kg que cae verticalmente en el extremo B, como se muestra en la figura 326. ¿Cuál será la máxima velocidad angular del sistema después del choque? (Examen de mejoramiento de Física I, I Término 2004 – 2005)
   Respuesta: 0.19 rad/s

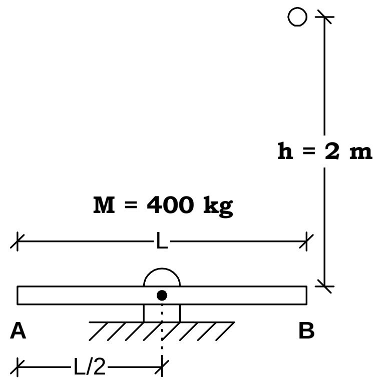


Figura 326

2. Indique si las afirmaciones siguientes son verdaderas o falsas, explicando el por qué de su elección.
   Todos los puntos de un cuerpo que gira tienen la misma velocidad angular.
   a) Verdadero b) Falso

   Todos los puntos de un cuerpo que gira tienen la misma velocidad lineal.
   a) Verdadero b) Falso

   El momento de inercia depende de la ubicación del eje de rotación.
   a) Verdadero b) Falso

   Si el momento neto de las fuerzas que actúan sobre un sólido es cero, la velocidad angular no cambia.
   a) Verdadero b) Falso

   Si la fuerza neta aplicada sobre un cuerpo es cero este cuerpo tiene momento angular cero.
   a) Verdadero b) Falso

(Segunda evaluación de Física A, I Término 2007 – 2008)
Respuesta: 2.1 a); 2.2 b); 2.3 a); 2.4 b); 2.5 b)

3. Un patinador gira inicialmente con sus brazos extendidos, cuando junta sus brazos
   a) Su momento angular se incrementa.
   b) Su momento angular no varía.
   c) Su momento angular disminuye.
   d) La respuesta depende de cuánto junte sus brazos.

(Segunda evaluación de Física A, I Término 2007 – 2008)
Respuesta: b)

4. Una varilla uniforme horizontal de 400 kg está en equilibrio y puede rotar libremente en el plano vertical. La varilla es impactada por un proyectil de 28 g que se mueve a 450 m/s. Si se considera la colisión como plástica y despreciable la fricción de la articulación en A, determine:
   a) La velocidad angular del sistema un instante después de la colisión.
   b) La máxima velocidad angular que puede experimentar el sistema después de la colisión.

(Lección del segundo parcial de Física A, I Término 2007 – 2008)
Respuesta: a) 0.015 rad/s; b) 0.032 rad/s

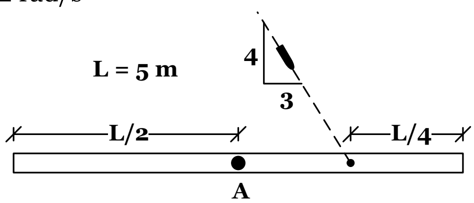


Figura 327

5. Un disco de masa M = 1.50 kg cuyo momento de inercia respecto a un eje vertical que pasa por su centro es 0.5 $kg \cdot m^2$, se mueve libremente en el plano horizontal con una velocidad angular de 300 rpm. En determinado instante se deposita sobre la superficie superior del disco una masa puntual de 1 kg, y queda unida al disco.
   a) ¿A qué distancia del eje se ha depositado la masa m si la velocidad de rotación del conjunto es de 270 rpm?
   b) ¿Cuál será la velocidad de rotación del conjunto si la masa puntual se hubiera depositado en el borde del disco?
   (Examen de mejoramiento de Física I, II Término 2004 – 2005)
   Respuesta: a) 0.236 m; b) 33 1/3 rpm.

6. Un disco de madera de 30 cm de radio y 5 kg está inicialmente en reposo sobre una superficie rugosa, como se muestra en la figura 328, repentinamente es chocado por un proyectil de masa m = 100 g que lo impacta en la parte superior del mismo. EL proyectil entra con una rapidez de 300 m/s y sale con una rapidez de 200 m/s. El disco comienza a rodar inmediatamente después del impacto y sube hasta detenerse en la parte superior de un plano inclinado. ¿Qué altura H alcanza el centro de masa del disco?
   (Examen final de Física A, I Término 2005 – 2006)
   Respuesta: 0.54 m

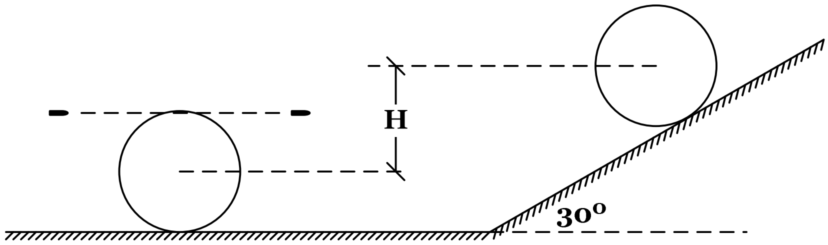


Figura 328

7. Un cubo de masa M y lado 2ª se desliza sobre una superficie horizontal sin fricción, con velocidad constante v_0. En el extrem de la mesa choca con un pequeño obstáculo, lo cual produce que el cubo gire con respecto al punto P. Encuentre el valor máximo de v_0 para que el cubo esté a punto de caer de la mesa. ($I = 2/3\ Ma^2$). (Lección # 3 de Física I, I Término 2003 – 2004)
   Respuesta: $v_0 = \sqrt{\frac{16}{3} ag\left(\sqrt{2}-1\right)}$

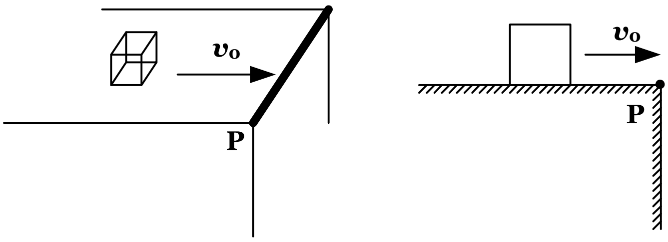


Figura 329

8. Un proyectil de 100 g que lleva una velocidad de 12.5 m/s choca con el centro del disco de un péndulo, tal como se muestra en la figura 330. Después del choque el proyectil queda empotrado en el centro del disco. El péndulo que gira en torno a un eje perpendicular que pasa por O, está formado por una barra delgada de 200 g y 20 cm de longitud, y un disco pequeño de 500 g y 5 cm de radio. Calcular la velocidad angular del sistema inmediatamente después del choque.
   Examen de mejoramiento de Física I, III Término 2002 – 2003)
   Respuesta: 6.63 rad/s

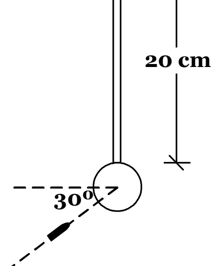


Figura 330

9. Se dispara una bala de 50 g con una velocidad inicial de 450 m/s contra una viga de madera de 24 kg articulada en O. Si la viga está en reposo inicialmente, determine
   a) La velocidad angular de la viga inmediatamente después de que se incrusta la bala.
   b) La pérdida de energía durante el choque.
   (Examen final de Física I, I Término 2003 – 2004)
   Respuesta: a) 0.56 rad/s; b) – 5057.34 J

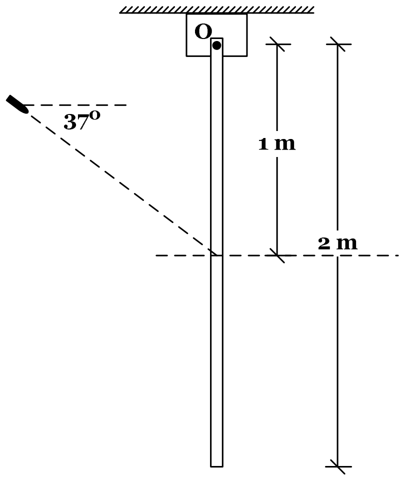


Figura 331

10. Un bloque de madera, de masa m = 1kg, que se encuentra fuertemente unido a un disco horizontal, de masa M = 40 kg y radio R = 1 m, es chocado por un proyectil de masa 100 g de manera que sale con la tercera parte de la velocidad con la que ingresa, v_o = 100 m/s. Si se desprecia la fricción en los soportes del disco, encuentre la velocidad angular en rpm del disco inmediatamente después del choque.
    (Examen de mejoramiento de Física I, I Término 1998 – 1999)
    Respuesta: 3 rpm

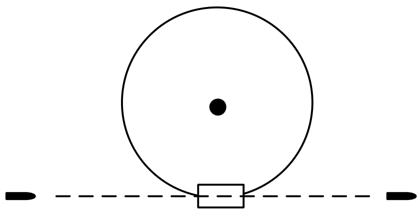


Figura 332