

# TRIGONOMETRÍA DEL CÍRCULO

## UNITARIO

# 9

### En este capítulo

- 9.1 Las funciones circulares
  - 9.2 Gráficas de las funciones seno y coseno
  - 9.3 Gráficas de otras funciones trigonométricas
  - 9.4 Identidades especiales
  - 9.5 Funciones trigonométricas inversas
  - 9.6 Ecuaciones trigonométricas
- Ejercicios de repaso

**Un poco de historia** La exposición de la sección 8.4 desemboca directamente en una forma más analítica de estudiar la trigonometría, donde coseno y seno se definen como las coordenadas  $x$  y  $y$ , respectivamente, de un punto  $(x, y)$  en un círculo unitario. Esta interpretación de seno y coseno nos permite definir las funciones trigonométricas como un número real, en lugar de un ángulo. Esta segunda aproximación a la trigonometría se utiliza en cálculo y en aplicaciones avanzadas de trigonometría. Además, una función trigonométrica de un número real se puede representar gráficamente como cualquier función ordinaria  $y = f(x)$ , donde la variable  $x$  representa un número real en el dominio de  $f$ .

Desde el punto de vista histórico, se desconoce quién realizó este importante avance de los senos y cosenos de ángulos a los senos y cosenos de números reales.



La forma de una cuerda de guitarra, fija en ambos extremos, se puede describir con las funciones trigonométricas de una variable.

## 9.1 Las funciones circulares

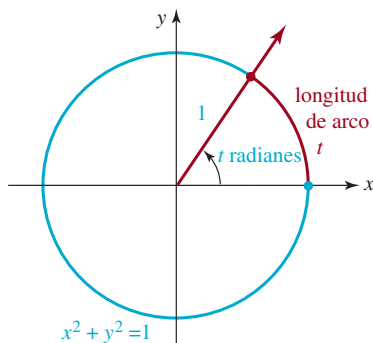


FIGURA 9.1.1 Círculo unitario

■ **Introducción** En el capítulo 8 estudiamos las funciones trigonométricas de *ángulos* ya sea en grados o radianes. En cálculo y las ciencias es necesario considerar las funciones trigonométricas cuyos dominios están formados por *números reales* y no por ángulos. Para realizar la transición de ángulos a números reales debemos reconocer que a cada número real  $t$  corresponde un ángulo que mide  $t$  radianes. Como veremos a continuación, esta correspondencia se puede representar gráficamente con un círculo de radio 1 y centro en el origen en un sistema de coordenadas rectangulares. Este círculo se conoce como **círculo unitario**. De la sección 4.2 se desprende que la ecuación del círculo unitario es  $x^2 + y^2 = 1$ . En esta sección nos centraremos en las funciones seno y coseno. Las otras cuatro funciones trigonométricas se estudiarán con pormenores en la sección 9.3.

Ahora consideraremos un **ángulo central**  $t$  en posición estándar, es decir, un ángulo cuyo vértice se sitúa en el centro de un círculo y su lado inicial coincide con el eje  $x$  positivo. Según la definición de medida en radianes (3) de la sección 8.1, el ángulo  $t$  se define como  $t = s/r$ , la razón del arco subtendido de longitud  $s$  al radio  $r$  del círculo. Por el círculo unitario que se muestra en la FIGURA 9.1.1,  $r = 1$  y, por tanto,  $t = s/1$  o  $t = s$ . En otras palabras:

*En un círculo unitario la medida en radianes de un ángulo de  $t$  radianes es igual a la medida  $t$  del arco subtendido.*

De lo anterior se desprende que para cada número real  $t$ , el lado terminal de un ángulo de  $t$  radianes en posición estándar ha recorrido una distancia de  $|t|$  unidades en la circunferencia del círculo unitario: en sentido contrario al de las agujas del reloj si  $t > 0$  y en el sentido de las agujas del reloj si  $t < 0$ . Esta asociación de cada número real  $t$  con un ángulo de  $t$  radianes se ilustra en la FIGURA 9.1.2.

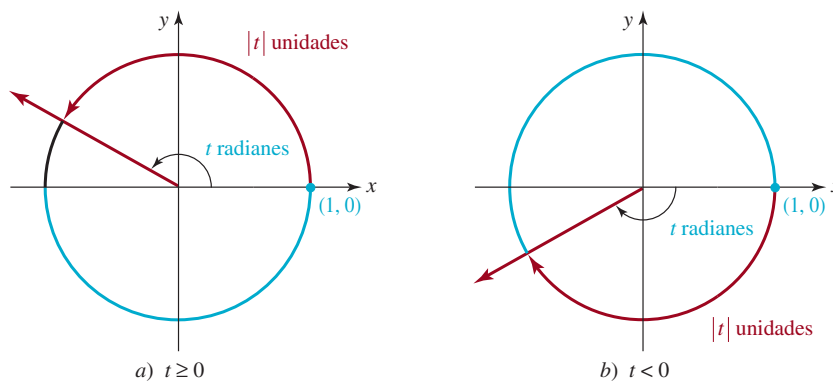


FIGURA 9.1.2 El ángulo de  $t$  radianes subtende un arco de longitud  $|t|$  unidades

■ **Funciones trigonométricas de los números reales** Ahora estamos en condiciones de definir las **funciones trigonométricas** de un número real. Antes de proseguir, necesitamos la siguiente definición importante.

### Definición 9.1.1 Valores de las funciones trigonométricas

El valor de una función trigonométrica de un número real  $t$  se define como el valor del ángulo de  $t$  radianes, siempre que ese valor exista.

Por ejemplo, el seno del número real  $\pi/6 = 0.62359\dots$  es sencillamente el seno del ángulo de  $\pi/6$  radianes que, como sabemos, es  $\frac{1}{2}$ . Por tanto, no hay nada nuevo en realidad en evaluar las funciones trigonométricas de un número real.

El círculo unitario es muy útil para describir las funciones trigonométricas de los números reales. Si  $P(t)$  denota el punto de intersección del lado terminal del ángulo  $t$  con el círculo unitario  $x^2 + y^2 = 1$  y  $P(x, y)$  son las coordenadas rectangulares de este punto, entonces, por (1) de la sección 8.4, tenemos

$$\operatorname{sen} t = \frac{y}{r} = \frac{y}{1} = y \quad \text{y} \quad \operatorname{cos} t = \frac{x}{r} = \frac{x}{1} = x.$$

Estas definiciones, además de las de las restantes cuatro funciones trigonométricas, se resumen a continuación.

### Definición 9.1.2 Funciones trigonométricas

Sea  $t$  cualquier número real y  $P(t) = P(x, y)$ , el punto de intersección en el círculo unitario con el lado terminal del ángulo de  $t$  radianes en posición estándar. Entonces, las seis funciones trigonométricas del número real  $t$  son:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} t &= y & \operatorname{cos} t &= x \\ \operatorname{tan} t &= \frac{y}{x} & \operatorname{cot} t &= \frac{x}{y} \\ \operatorname{sec} t &= \frac{1}{x} & \operatorname{csc} t &= \frac{1}{y}. \end{aligned} \tag{1}$$

Por la primera línea de (1) de la definición 9.1.2, de inmediato vemos que

*Para cualquier número real  $t$ , el **coseno** y **seno** de  $t$  son las coordenadas  $x$  y  $y$ , respectivamente, del punto  $P$  de intersección del lado terminal del ángulo de  $t$  radianes (en posición estándar) con el círculo unitario (figura 9.1.3).*

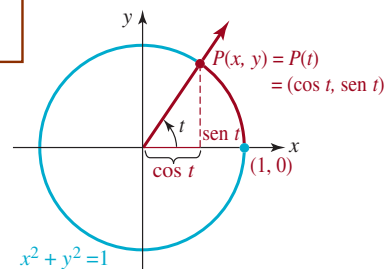


FIGURA 9.1.3 Las coordenadas de  $P(t)$  son  $(\operatorname{cos} t, \operatorname{sen} t)$

Como veremos en seguida, varias propiedades importantes de las funciones seno y coseno se pueden obtener de este resultado. Debido a la importancia que tiene el círculo unitario en esta exposición, las funciones trigonométricas (1) a menudo se conocen como **funciones circulares**.

Varias propiedades de las funciones seno y coseno se desprenden del hecho de que  $P(t) = (\operatorname{cos} t, \operatorname{sen} t)$  se localiza en el círculo unitario. Por ejemplo, las coordenadas de  $P(t)$  deben satisfacer la ecuación del círculo:

$$x^2 + y^2 = 1$$

Si sustituimos  $x = \operatorname{cos} t$  y  $y = \operatorname{sen} t$  en la ecuación anterior, obtenemos el resultado conocido  $\operatorname{cos}^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$ . Esta relación entre las funciones seno y coseno es la más importante de las identidades trigonométricas y se conoce como **identidad pitagórica**. Recuerde que esta identidad no es sólo válida para los ángulos, como se explicó en las secciones 8.2 y 8.4, sino que ahora vemos que también es válida para todos los números reales  $t$ .

### Teorema 9.1.1 Identidad pitagórica

Para todos los números reales  $t$ ,

$$\operatorname{sen}^2 t + \operatorname{cos}^2 t = 1 \tag{2}$$

■ **Límites de los valores de seno y coseno** Varias propiedades de las funciones seno y coseno se desprenden del hecho de que  $P(t) = P(x, y)$  se localiza en el círculo unitario. Por ejemplo, se desprende que

$$-1 \leq x \leq 1 \quad \text{y} \quad -1 \leq y \leq 1$$

Puesto que  $x = \cos t$  y  $y = \sin t$ , las inequaciones siguientes equivalen a

$$-1 \leq \cos t \leq 1 \quad \text{y} \quad -1 \leq \sin t \leq 1 \quad (3)$$

Las inequaciones en (3) también se pueden expresar con valores absolutos, como  $|\cos t| \leq 1$  y  $|\sin t| \leq 1$ . Así, por ejemplo, no hay ningún número real  $t$  para el cual  $\sin t = \frac{3}{2}$ .

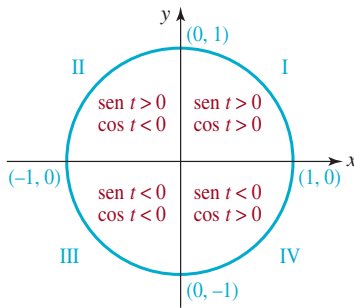


FIGURA 9.1.4 Signos algebraicos de  $\sin t$  y  $\cos t$  en los cuatro cuadrantes

■ **Dominio y rango** Las observaciones en (3) indican que tanto  $\cos t$  como  $\sin t$  pueden ser cualquier número comprendido en el intervalo  $[-1, 1]$ . Por tanto, tenemos las funciones seno y coseno,

$$f(t) = \sin t \quad \text{y} \quad g(t) = \cos t,$$

respectivamente, y el dominio de cada una es el conjunto  $R$  de todos los números reales y el rango es el intervalo  $[-1, 1]$ . Los dominios y rangos de las otras cuatro funciones trigonométricas se explicarán en la sección 9.3.

■ **Signos de las funciones circulares** Los signos de los valores de las funciones  $\sin t$  y  $\cos t$  quedan determinados por el cuadrante en el que está situado el punto  $P(t)$ , y viceversa. Por ejemplo, si  $\sin t$  y  $\cos t$  son negativos, entonces el punto  $P(t)$  y el lado terminal del ángulo correspondiente de  $t$  radianes tiene que estar situado en el cuadrante III. En la FIGURA 9.1.4 se muestran los signos de las funciones coseno y seno y cada uno de los cuatro cuadrantes.

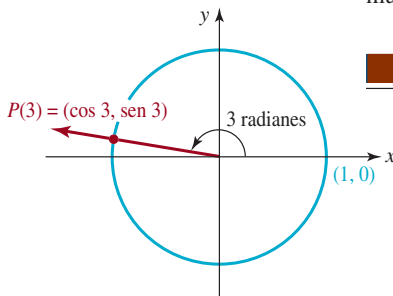


FIGURA 9.1.5 El punto  $P(3)$  del ejemplo 1

#### EJEMPLO 1 Seno y coseno de un número real

Use la calculadora para aproximar  $\sin 3$  y  $\cos 3$  y ofrezca una interpretación geométrica de estos valores.

**Solución** Con la calculadora en *modo de radianes*, obtenemos  $\cos 3 \approx -0.9899925$  y  $\sin 3 \approx 0.1411200$ . Estos valores representan las coordenadas  $x$  y  $y$ , respectivamente, del punto de intersección  $P(3)$  del lado terminal del ángulo de 3 radianes en posición estándar, con el círculo unitario. Como se muestra en la FIGURA 9.1.5, este punto está situado en el segundo cuadrante, porque  $\pi/2 < 3 < \pi$ . Esto también es de esperar en vista de la figura 9.1.4, pues  $\cos 3$ , la coordenada  $x$ , es *negativo* y  $\sin 3$ , la coordenada  $y$ , es *positivo*.  $\equiv$

■ **Periodicidad** En la sección 8.1 vimos que los ángulos de  $t$  radianes y  $t \pm 2\pi$  radianes son coterminales. Por consiguiente, determinan el mismo punto  $P(x, y)$  en el círculo unitario. Por tanto,

$$\sin t = \sin(t \pm 2\pi) \quad \text{y} \quad \cos t = \cos(t \pm 2\pi) \quad (4)$$

En otras palabras, las funciones seno y coseno repiten sus valores cada  $2\pi$  unidades. También se desprende que para cualquier entero  $n$ :

$$\begin{aligned} \sin(t + 2n\pi) &= \sin t \\ \cos(t + 2n\pi) &= \cos t. \end{aligned} \quad (5)$$

#### Definición 9.1.3 Funciones periódicas

Se dice que una función no constante  $f$  es **periódica** si hay un número positivo  $p$  tal que

$$f(t) = f(t + p) \quad (6)$$

para cada  $t$  en el dominio de  $f$ . Si  $p$  es el número positivo más pequeño para el cual (6) es verdadero, entonces  $p$  se llama **periodo** de la función  $f$ .

Las ecuaciones en (4) implican que las funciones seno y coseno son periódicas y que el periodo es  $p \leq 2\pi$ . Para entender que el periodo de  $\sin t$  es  $2\pi$ , observamos que existe sólo un punto en el círculo unitario con coordenada y 1, a saber,  $P(\pi/2) = (\cos(\pi/2), \sin(\pi/2)) = (0, 1)$ . Por tanto,

$$\sin t = 1 \quad \text{sólo para} \quad t = \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \pm 2\pi, \frac{\pi}{2} \pm 4\pi,$$

y así sucesivamente. Por tanto, el valor positivo más pequeño posible de  $p$  es  $2\pi$ . En resumen, la función seno  $f(t) = \sin t$  y la función coseno  $g(t) = \cos t$  son periódicas con **periodo**  $2\pi$ ; es decir,  $f(t) = f(t + 2\pi)$  y  $g(t) = g(t + 2\pi)$ , respectivamente. Como referencia en el futuro, tenemos

$$\sin(t + 2\pi) = \sin t \quad \text{y} \quad \cos(t + 2\pi) = \cos t \quad (7)$$

para cada número real  $t$ .

### EJEMPLO 2 Usar la periodicidad

Evalúe **a)**  $\sin(7\pi/3)$  y **b)**  $\cos(13\pi/3)$ .

**Solución a)** Debido a que  $7\pi/3$  es mayor que  $2\pi$  y puede escribirse

$$\frac{7\pi}{3} = 2\pi + \frac{\pi}{3},$$

se desprende de  $\sin(t + 2\pi) = \sin t$ , donde  $t = \pi/3$ , que

$$\sin \frac{7\pi}{3} = \sin\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi\right) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad \leftarrow \text{Véase la tabla 8.3.1}$$

◀ Véase la primera ecuación de (7).

**b)** Debido a que

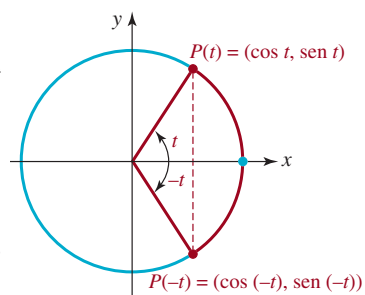
$$\frac{19\pi}{3} = 6\pi + \frac{\pi}{3},$$

se desprende de  $\cos(t + 2n\pi) = \cos t$ , donde  $n = 3$  y  $t = \pi/3$ , que

$$\cos \frac{19\pi}{3} = \cos\left(\frac{\pi}{3} + 6\pi\right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$

≡ ◀ Véase la segunda ecuación de (7).

■ **Propiedades de funciones impares y pares** La simetría del círculo unitario dota a las funciones circulares de varias propiedades adicionales. Para todo número real  $t$ , los puntos  $P(t)$  y  $P(-t)$  en el círculo unitario se localizan en el lado terminal de un ángulo de  $t$  y  $-t$  radianes, respectivamente. Estos dos puntos siempre serán simétricos con respecto al eje  $x$ . La **FIGURA 9.1.6** ilustra la situación para un punto  $P(t)$  situado en el primer cuadrante: las coordenadas  $x$  de los dos puntos son idénticas, pero las coordenadas  $y$  tienen magnitudes iguales, pero signos opuestos. Las mismas simetrías serán válidas sin importar el cuadrante que contenga  $P(t)$ . Por tanto, para  $f(t) = \sin t$  y  $g(t) = \cos t$  y cualquier número real  $t$ ,  $f(t) = -f(-t)$  y  $g(-t) = g(t)$ , respectivamente. Si aplicamos las definiciones de **funciones impares** y **pares** de la sección 5.2, tendremos el siguiente resultado:



**FIGURA 9.1.6** Coordenadas de  $P(t)$  y  $P(-t)$

#### Teorema 9.1.2 Funciones impares y pares

La función seno  $f(t) = \sin t$  es **impar** y la función coseno  $g(t) = \cos t$  es **par**; es decir, para cada número real  $t$ ,

$$\sin(-t) = -\sin t \quad \text{y} \quad \cos(-t) = \cos t \quad (8)$$

### EJEMPLO 3 Uso de las propiedades de funciones impares y pares

Obtenga los valores exactos de  $\operatorname{sen} t$  y  $\operatorname{cos} t$  para el número real  $t = -\pi/6$ .

**Solución** Por (8), tenemos

$$\overbrace{\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}}^{\text{seno es una función impar}} \quad \leftarrow \text{Véase la tabla 8.3.1}$$

$$y \quad \overbrace{\operatorname{cos}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{cos}\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}}^{\text{coseno es una función par}}$$

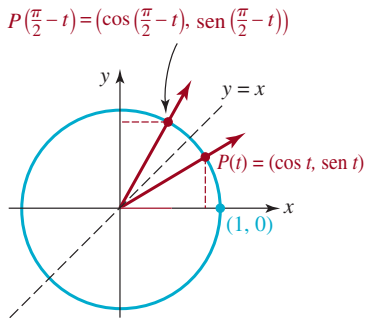
Tenga en cuenta que los signos de las respuestas concuerdan con el hecho de que el lado terminal del ángulo  $-\pi/6$  radianes está situado en el cuadrante IV.  $\equiv$

Para verificar las siguientes propiedades adicionales de las funciones seno y coseno, se consideran las simetrías de los puntos elegidos apropiadamente en el círculo unitario. Primero vimos los resultados de *i*) y *ii*) en el siguiente teorema planteado para ángulos agudos en (5) de la sección 8.2.

#### Teorema 9.1.3 Propiedades adicionales

Para todos los números reales  $t$ ,

- |  |   |
|--|---|
| <i>i</i> ) $\operatorname{cos}\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \operatorname{sen} t$ | <i>ii</i> ) $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \operatorname{cos} t$ |
| <i>iii</i> ) $\operatorname{cos}(t + \pi) = -\operatorname{cos} t$                   | <i>iv</i> ) $\operatorname{sen}(t + \pi) = -\operatorname{sen} t$                     |
| <i>v</i> ) $\operatorname{cos}(\pi - t) = -\operatorname{cos} t$                     | <i>vi</i> ) $\operatorname{sen}(\pi - t) = \operatorname{sen} t$                      |



**FIGURA 9.1.7** Justificación geométrica de *i*) y *ii*) del teorema 9.1.3

Por ejemplo, para justificar las propiedades *i*) y *ii*) del teorema 9.1.3 para  $0 < t < \pi/2$ , considere la **FIGURA 9.1.7**. Puesto que los puntos  $P(t)$  y  $P(\pi/2 - t)$  son simétricos con respecto a la recta  $y = x$ , para obtener las coordenadas de  $P(\pi/2 - t)$ , intercambiamos las coordenadas de  $P(t)$ . Por tanto,

$$\operatorname{cos} t = x = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \quad y \quad \operatorname{sen} t = y = \operatorname{cos}\left(\frac{\pi}{2} - t\right).$$

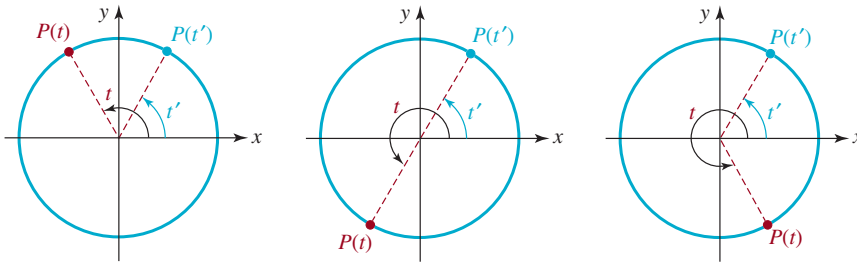
En la sección 9.4 usaremos las propiedades *i*) y *ii*) para justificar dos fórmulas importantes para la función seno.

### EJEMPLO 4 Uso del teorema 9.1.3

En la tabla 8.3.1 de la sección 8.3 vimos que  $\operatorname{cos}(\pi/3) = \operatorname{sen}(\pi/6)$ . Este resultado es un caso especial de la propiedad *i*) del teorema 9.1.3; con  $t = \pi/3$  vemos que

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \overbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{cos}\frac{\pi}{3}}^{\text{aplicación de la propiedad i) del teorema 9.1.3}} \quad \equiv$$

■ **Ángulo de referencia, segunda parte** Como señalamos al principio de esta sección, para cada número real  $t$  hay un ángulo único de  $t$  radianes en posición estándar que determina el punto  $P(t)$ , que coordina  $(\operatorname{cos} t, \operatorname{sen} t)$ , en el círculo unitario. Como se muestra en la **FIGURA 9.1.8**, el lado terminal de todo ángulo de  $t$  radianes (donde  $P(t)$  no está situado en un eje)



**FIGURA 9.1.8** El ángulo de referencia  $t'$  es un ángulo agudo

formará un ángulo agudo con el eje  $x$ . En seguida podemos localizar un ángulo de  $t'$  radianes en el primer cuadrante que es congruente con este ángulo agudo. El ángulo de  $t'$  radianes se conoce como **ángulo de referencia** para cualquier número real  $t$ . Debido a la simetría del círculo unitario, las coordenadas de  $P(t')$  serán iguales en *valor absoluto* a las coordenadas respectivas de  $P(t)$ . Por tanto,

$$\operatorname{sen} t = \pm \operatorname{sen} t' \quad \text{y} \quad \operatorname{cos} t = \pm \operatorname{cos} t'$$

Como se mostrará en los ejemplos siguientes, los ángulos de referencia se pueden usar para obtener los valores de las funciones trigonométricas de todos los múltiplos enteros de  $\pi/6$ ,  $\pi/4$  y  $\pi/3$ .

#### EJEMPLO 5 Uso de un ángulo de referencia

Obtenga los valores exactos de  $\operatorname{sen} t$  y  $\operatorname{cos} t$  para el número real dado:

a)  $t = 5\pi/3$     b)  $t = -3\pi/4$ .

**Solución** En primer lugar, en cada parte obtenemos el ángulo de referencia correspondiente al número real  $t$ .

a) Por la **FIGURA 9.1.9**, sabemos que un ángulo de  $t = 5\pi/3$  radianes determina un punto  $P(5\pi/3)$  en el cuarto cuadrante y tiene el ángulo de referencia  $t' = \pi/3$  radianes. Después de ajustar los signos de las coordenadas de  $P(\pi/3) = (1/2, \sqrt{3}/2)$  para obtener el punto  $P(5\pi/3) = (1/2, -\sqrt{3}/2)$  del cuarto cuadrante, tenemos que

$$\operatorname{sen} \frac{5\pi}{3} = -\operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{y} \quad \operatorname{cos} \frac{5\pi}{3} = \operatorname{cos} \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$

b) El punto  $P(-3\pi/4)$  está situado en el tercer cuadrante y tiene un ángulo de referencia  $\pi/4$  como se ilustra en la **FIGURA 9.1.10**. Por tanto,

$$\operatorname{sen} \left( -\frac{3\pi}{4} \right) = -\operatorname{sen} \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{y} \quad \operatorname{cos} \left( -\frac{3\pi}{4} \right) = -\operatorname{cos} \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

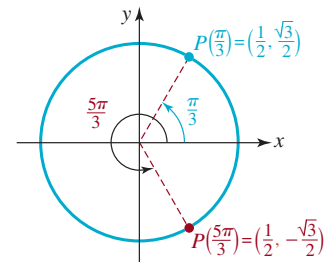
En ocasiones, para obtener los valores trigonométricos de múltiplos de las fracciones básicas de  $\pi$ , debemos usar la periodicidad o las propiedades de las funciones impares y pares, además de los ángulos de referencia.

#### EJEMPLO 6 Uso de la periodicidad y el ángulo de referencia

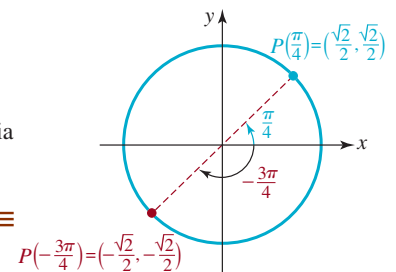
Obtenga los valores exactos de las coordenadas de  $P(29\pi/6)$  en el círculo unitario.

**Solución** El punto  $P(29\pi/6)$  tiene las coordenadas  $(\operatorname{cos}(29\pi/6), \operatorname{sen}(29\pi/6))$ . Para empezar, observamos que  $29\pi/6$  es mayor que  $2\pi$  y, en consecuencia, debemos reescribir  $29\pi/6$  como múltiplo entero de  $2\pi$  más un número menor que  $2\pi$ . Por la división tenemos

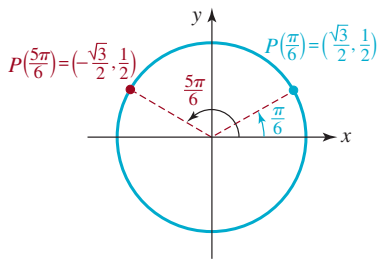
$$\frac{29\pi}{6} = 4\pi + \frac{5\pi}{6} = 2(2\pi) + \frac{5\pi}{6}.$$



**FIGURA 9.1.9** Ángulo de referencia de la parte a) del ejemplo 5



**FIGURA 9.1.10** Ángulo de referencia de la parte b) del ejemplo 5



**FIGURA 9.1.11** Ángulo de referencia del ejemplo 6

A continuación, por las ecuaciones de periodicidad en (5) con  $n = 2$ , sabemos que

$$\operatorname{sen}\left(\frac{29\pi}{6}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{6}\right) \quad \text{y} \quad \operatorname{cos}\left(\frac{29\pi}{6}\right) = \operatorname{cos}\left(\frac{5\pi}{6}\right).$$

En seguida vemos, por la figura 9.1.11, que el ángulo de referencia de  $5\pi/6$  es  $\pi/6$ . Puesto que  $P(5\pi/6)$  es un punto situado en el segundo cuadrante, su coordenada  $x$   $\operatorname{cos}(5\pi/6)$  es negativa y su coordenada  $y$   $\operatorname{sen}(5\pi/6)$  es positiva. Por último, usando el ángulo de referencia como se muestra en la figura 9.1.11, simplemente ajustamos los signos algebraicos de las coordenadas de  $P(\pi/6) = (\operatorname{cos}(\pi/6), \operatorname{sen}(\pi/6))$ :

$$\operatorname{cos}\frac{29\pi}{6} = \operatorname{cos}\frac{5\pi}{6} = -\operatorname{cos}\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{y} \quad \operatorname{sen}\frac{29\pi}{6} = \operatorname{sen}\frac{5\pi}{6} = \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$$

Por tanto,  $P(29\pi/6) = (-\sqrt{3}/2, 1/2)$ . ≡

## 9.1 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-22.

En los problemas 1 a 8, para el número real  $t$  dado, **a)** localice el punto  $P(t) = (\operatorname{cos} t, \operatorname{sen} t)$  en el círculo unitario y **b)** obtenga los valores exactos de las coordenadas de  $P(t)$ . No use la calculadora.

1.  $\frac{7\pi}{6}$

2.  $-\frac{4\pi}{3}$

3.  $-\frac{\pi}{2}$

4.  $2\pi$

5.  $\frac{5\pi}{3}$

6.  $-\frac{3\pi}{2}$

7.  $-\frac{11\pi}{6}$

8.  $\frac{5\pi}{4}$

En los problemas 9 a 16, para el número real  $t$  dado, **a)** localice el punto  $P(t) = (\operatorname{cos} t, \operatorname{sen} t)$  en el círculo unitario y **b)** use la calculadora para aproximar las coordenadas de  $P(t)$ .

9. 1.3

10. -4.4

11. -7.2

12. 0.5

13. 6.1

14. 3.2

15. -2.6

16. 15.3

En los problemas 17 a 24, use la periodicidad de  $\operatorname{sen} t$  y  $\operatorname{cos} t$  para obtener el valor exacto de la función trigonométrica. No use la calculadora.

17.  $\operatorname{sen}\frac{13\pi}{6}$

18.  $\operatorname{cos}\frac{61\pi}{3}$

19.  $\operatorname{cos}\frac{9\pi}{4}$

20.  $\operatorname{sen}\left(-\frac{5\pi}{3}\right)$

21.  $\operatorname{cos} 9\pi$

22.  $\operatorname{sen} 20\pi$

23.  $\operatorname{sen}\frac{7\pi}{2}$

24.  $\operatorname{cos}\frac{27\pi}{4}$

En los problemas 25 a 30, justifique el planteamiento dado con una de las propiedades de  $\operatorname{sen} t$  y  $\operatorname{cos} t$  que estudiamos en esta sección.



25.  $\text{sen } \pi = \text{sen } 3\pi$   
 26.  $\text{cos } (\pi/4) = \text{sen } (\pi/4)$   
 27.  $\text{sen } (-3 - \pi) = -\text{sen } (3 + \pi)$   
 28.  $\text{cos } 16.8\pi = \text{cos } 14.8\pi$   
 29.  $\text{cos } 0.43 = \text{cos } (-0.43)$   
 30.  $\text{cos } (2.5 + \pi) = -\text{cos } 2.5$   
 31. Puesto que  $\text{cos } t = -\frac{2}{5}$  y que  $P(t)$  es un punto en el círculo unitario en el segundo cuadrante, obtenga  $\text{sen } t$ .  
 32. Puesto que  $\text{sen } t = \frac{1}{4}$  y que  $P(t)$  es un punto en el círculo unitario en el segundo cuadrante, obtenga  $\text{cos } t$ .  
 33. Puesto que  $\text{sen } t = -\frac{2}{3}$  y que  $P(t)$  es un punto en el círculo unitario en el tercer cuadrante, obtenga  $\text{cos } t$ .  
 34. Puesto que  $\text{cos } t = \frac{3}{4}$  y que  $P(t)$  es un punto en el círculo unitario en el cuarto cuadrante, obtenga  $\text{sen } t$ .

36.  $\text{sen} \left( \frac{5\pi}{8} - 2\pi \right)$   
 37.  $\text{sen} \left( -\frac{5\pi}{8} \right)$   
 38.  $\text{cos} \left( -\frac{5\pi}{8} \right)$

En los problemas 39 a 42, use el círculo unitario para determinar todos los números reales  $t$  para los cuales la igualdad dada es verdadera.

39.  $\text{sen } t = \sqrt{2}/2$   
 40.  $\text{cos } t = -\frac{1}{2}$   
 41.  $\text{cos } t = -1$   
 42.  $\text{sen } t = -1$

En los problemas 35 a 38, la coordenada y del punto  $P(5\pi/8)$  en el círculo unitario es  $\frac{1}{2}\sqrt{2} + \sqrt{2}$ . Obtenga el valor exacto de la función trigonométrica dada. No use la calculadora.

35.  $\text{cos } \frac{5\pi}{8}$

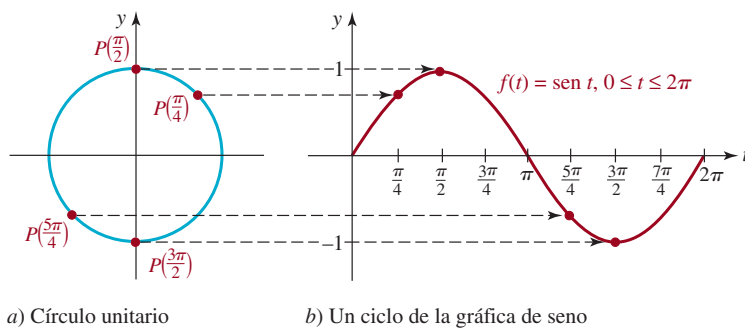
### ≡ Para la discusión

43. Suponga que  $f$  es una función periódica con periodo  $p$ . Demuestre que  $F(x) = f(ax)$ ,  $a > 0$ , es periódica con periodo  $p/a$ .

## 9.2 Gráficas de las funciones seno y coseno

■ **Introducción** Una forma de estimular la comprensión de las funciones trigonométricas es examinar sus gráficas. En esta sección examinaremos las gráficas de las funciones seno y coseno.

■ **Gráficas del seno y del coseno** En la sección 9.1 vimos que el dominio de la función seno,  $f(t) = \text{sen } t$ , es el conjunto de todos los números reales  $(-\infty, \infty)$ , y que su contradominio es el intervalo  $[-1, 1]$ . Como el periodo de la función seno es  $2\pi$ , comenzaremos trazando su gráfica en el intervalo  $[0, 2\pi]$ . Se obtiene un bosquejo aproximado de la gráfica de la **FIGURA 9.2.1b** si se examinan varias posiciones del punto  $P(t)$  en el círculo unitario, como se ve en la figura 9.2.1a). Cuando  $t$  varía de 0 a  $\pi/2$ , el valor de  $\text{sen } t$  aumenta de 0 hasta su valor máximo 1. Pero cuando  $t$  varía de  $\pi/2$  a  $3\pi/2$ , el valor de  $\text{sen } t$  disminuye desde 1 hasta su valor



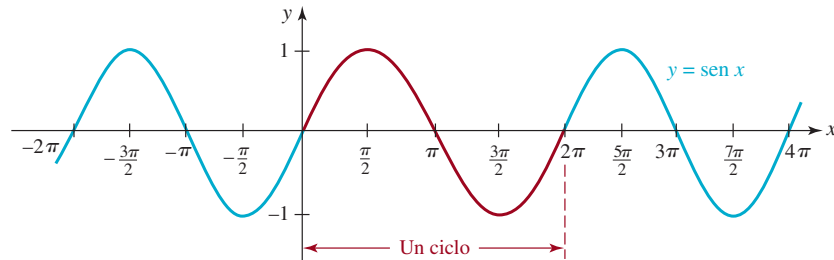
**FIGURA 9.2.1** Puntos  $P(t)$  en un círculo, correspondientes a puntos en la gráfica

mínimo,  $-1$ . Se ve que  $\text{sen } t$  cambia de positivo a negativo cuando  $t = \pi$ . Cuando  $t$  está entre  $3\pi/2$  y  $2\pi$ , se ve que los valores correspondientes de  $\text{sen } t$  aumentan de  $-1$  a  $0$ . Se dice que la gráfica de *cualquier* función periódica, para un intervalo de longitud igual a su periodo, es un **ciclo** de su gráfica. En el caso de la función seno, la gráfica sobre el intervalo  $[0, 2\pi]$  de la figura 9.2.1b) es un ciclo de la gráfica de  $f(t) = \text{sen } t$ .

Nota: cambio de símbolos

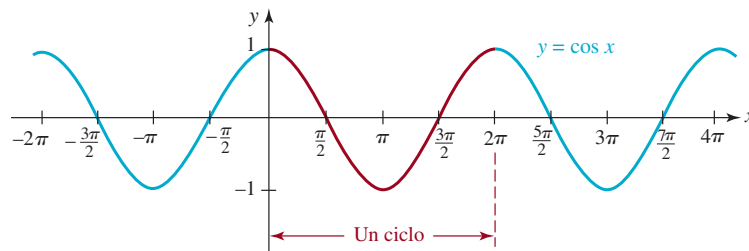
► En adelante, recurriremos a los símbolos tradicionales  $x$  y  $y$  para graficar las funciones trigonométricas. Así, escribiremos  $f(t) = \text{sen } t$  en la forma  $f(x) = \text{sen } x$  o bien, simplemente  $y = \text{sen } x$ .

La gráfica de una función periódica se obtiene con facilidad trazando repetidamente un ciclo de su gráfica. En otras palabras, la gráfica de  $y = \text{sen } x$  en, por ejemplo, los intervalos  $[-2\pi, 0]$  y  $[2\pi, 4\pi]$ , es la misma de la figura 9.2.1b). Recuerde, de la sección 9.1, que la función seno es una función impar, porque  $f(-x) = \text{sen}(-x) = -\text{sen } x = -f(x)$ . Así, como se puede ver en la **FIGURA 9.2.2**, la gráfica de  $y = \text{sen } x$  es simétrica con respecto al origen.



**FIGURA 9.2.2** Gráfica de  $y = \text{sen } x$

Al trabajar de nuevo con el círculo unitario se puede obtener un ciclo de la gráfica de la función coseno  $g(x) = \text{cos } x$  en el intervalo  $[0, 2\pi]$ . En contraste con la gráfica de  $f(x) = \text{sen } x$ , donde  $f(0) = f(2\pi) = 0$ , en la función coseno se tiene  $g(0) = g(2\pi) = 1$ . La **FIGURA 9.2.3** muestra un ciclo (en rojo) de  $y = \text{cos } x$  en  $[0, 2\pi]$ , junto con la extensión de ese ciclo (en azul) a los intervalos adyacentes  $[-2\pi, 0]$  y  $[2\pi, 4\pi]$ . En esta figura se ve que la gráfica de la función coseno es simétrica con respecto al eje  $y$ . Es una consecuencia de que  $g$  sea una función par:  $g(-x) = \text{cos}(-x) = \text{cos } x = g(x)$ .



**FIGURA 9.2.3** Gráfica de  $y = \text{cos } x$

■ **Propiedades de las funciones seno y coseno** En este curso de matemáticas, y en los que siguen, es importante que conozca usted las coordenadas  $x$  de las intersecciones de las gráficas de seno y coseno con el eje  $x$ ; es decir, las raíces de  $f(x) = \text{sen } x$  y  $g(x) = \text{cos } x$ . Según la gráfica del seno en la figura 9.2.2, se ve que las raíces de la función seno, o sea los números para los que  $\text{sen } x = 0$ , son  $x = 0, \pm\pi, \pm2\pi, \pm3\pi, \dots$  son múltiplos enteros de  $\pi$ . En la gráfica del coseno en la figura 9.2.3 se ve que  $\text{cos } x = 0$  cuando  $x = \pm\pi/2, \pm3\pi/2, \pm5\pi/2, \dots$ . Esos números son múltiplos enteros impares de  $\pi/2$ .

► Un entero impar se puede escribir como  $2n + 1$ , donde  $n$  es un entero.

Si  $n$  representa un entero, entonces  $2n + 1$  es un entero impar. Entonces, las raíces de  $f(x) = \text{sen } x$  y de  $g(x) = \text{cos } x$  se pueden expresar en forma compacta como sigue.

## PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES SEÑO Y COSENO

- El dominio de  $f(x) = \text{sen } x$  y el dominio de  $g(x) = \text{cos } x$  es el conjunto de números reales, es decir,  $(-\infty, \infty)$ .
- El rango de  $f(x) = \text{sen } x$  y el rango de  $g(x) = \text{cos } x$  es el intervalo  $[-1, 1]$  en el eje  $y$ .
- Los ceros de  $f(x) = \text{sen } x$  son  $x = n\pi$ ,  $n$  un entero. Los ceros de  $g(x) = \text{cos } x$  son  $x = (2n + 1)\pi/2$ ,  $n$  un entero.
- La gráfica de  $f(x) = \text{sen } x$  es simétrica con respecto al origen. La gráfica de  $g(x) = \text{cos } x$  es simétrica con respecto al eje  $y$ .
- Las funciones  $f(x) = \text{sen } x$  y  $g(x) = \text{cos } x$  son continuas en el intervalo  $(-\infty, \infty)$ .

Al aplicar la ley distributiva, el resultado en (2) con frecuencia se escribe  $x = \pi/2 + n\pi$ .

Como hicimos en los capítulos 2 y 3, se pueden obtener variaciones de las gráficas básicas de seno y coseno mediante transformaciones rígidas y no rígidas. En lo que queda de esta descripción examinaremos gráficas de funciones de la forma

$$y = A \text{sen}(Bx + C) + D \quad \text{o bien} \quad y = A \text{cos}(Bx + C) + D, \quad (1)$$

donde  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  son constantes reales.

■ **Gráficas de  $y = A \text{sen } x + D$  y  $y = A \text{cos } x + D$**  Comenzaremos examinando los casos especiales de (1):

$$y = A \text{sen } x \quad \text{y} \quad y = A \text{cos } x.$$

Para  $A > 0$ , las gráficas de esas funciones son un estiramiento vertical o una compresión vertical de las gráficas de  $y = \text{sen } x$  o de  $y = \text{cos } x$ . En el caso de  $A < 0$ , las gráficas también se reflejan en el eje  $x$ . Por ejemplo, como muestra la **FIGURA 9.2.4**, se obtiene la gráfica de  $y = 2 \text{sen } x$  estirando verticalmente la gráfica de  $y = \text{sen } x$  por un factor de 2. Nótese que los valores máximo y mínimo de  $y = 2 \text{sen } x$  están en los mismos valores de  $x$  que los valores máximo y mínimo de  $y = \text{sen } x$ . En general, la distancia máxima de cualquier punto en la gráfica de  $y = A \text{sen } x$ , o  $y = A \text{cos } x$ , al eje  $x$ , es  $|A|$ . Al número  $|A|$  se le llama **amplitud** de las funciones o de sus gráficas. La amplitud de las funciones básicas  $y = \text{sen } x$  y  $y = \text{cos } x$  es  $|A| = 1$ . En general, si una función periódica  $f$  es continua, entonces, en un intervalo cerrado de longitud igual a su periodo,  $f$  tiene un valor máximo  $M$  y también un valor mínimo  $m$ . La amplitud se define por

$$\text{amplitud} = \frac{1}{2}[M - m]. \quad (2)$$

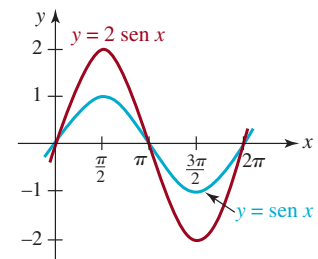
### EJEMPLO 1 Gráfica de coseno comprimida verticalmente

Graficar  $y = -\frac{1}{2} \text{cos } x$ .

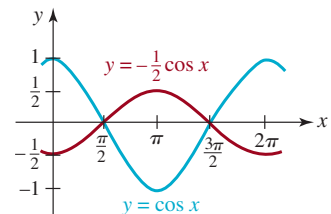
**Solución** La gráfica de  $y = -\frac{1}{2} \text{cos } x$  es la de  $y = \text{cos } x$  comprimida verticalmente por un factor de  $\frac{1}{2}$ , y reflejada después en el eje  $x$ . Si  $A = -\frac{1}{2}$ , se ve que la amplitud de la función es  $|A| = |-\frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$ . La gráfica de  $y = -\frac{1}{2} \text{cos } x$  en el intervalo  $[0, 2\pi]$  se muestra en rojo en la **FIGURA 9.2.5**.

Las gráficas de

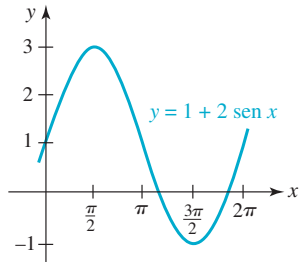
$$y = A \text{sen } x + D \quad \text{y} \quad y = A \text{cos } x + D$$



**FIGURA 9.2.4** Estiramiento vertical de  $y = \text{sen } x$



**FIGURA 9.2.5** Gráfica de la función del ejemplo 1



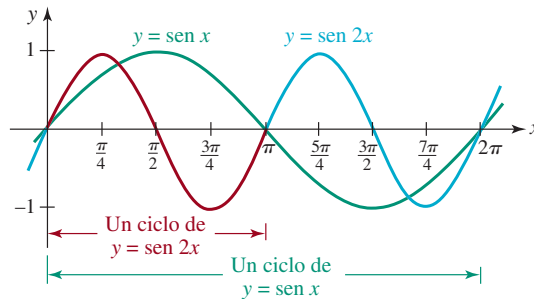
**FIGURA 9.2.6** Gráfica de  $y = 2 \operatorname{sen} x$  desplazada 1 unidad hacia arriba

son las gráficas de  $y = A \operatorname{sen} x$  y  $y = A \cos x$  desplazadas verticalmente hacia arriba cuando  $D > 0$ , y hacia abajo cuando  $D < 0$ . Por ejemplo, la gráfica de  $y = 1 + 2 \operatorname{sen} x$  es la gráfica de  $y = 2 \operatorname{sen} x$  (figura 9.2.4) desplazada 1 unidad hacia arriba. La amplitud de la gráfica de  $y = A \operatorname{sen} x + D$ , o de  $y = A \cos x + D$  sigue siendo  $|A|$ . Nótese que en la gráfica de la **FIGURA 9.2.6**, el máximo de  $y = 1 + 2 \operatorname{sen} x$  es  $y = 3$ , en  $x = \pi/2$ , y el mínimo es  $y = -1$  en  $x = 3\pi/2$ . De acuerdo con (4), la amplitud de  $y = 1 + 2 \operatorname{sen} x$  es, entonces,  $\frac{1}{2}[3 - (-1)] = 2$ .

Si se interpreta a  $x$  como comodín para apartar lugar, en las ecuaciones (1) y (2), se pueden determinar las coordenadas  $x$  de las intersecciones con el eje  $x$  de las gráficas de las funciones seno y coseno, de la forma  $y = A \operatorname{sen} Bx$  y  $y = A \cos Bx$  (que veremos a continuación). Por ejemplo, para resolver  $\operatorname{sen} 2x = 0$ , de acuerdo con (1) sucede que

$$2x = n\pi \quad \text{de modo que} \quad x = \frac{1}{2}n\pi, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

esto es,  $x = 0, \pm \frac{1}{2}\pi, \pm \frac{3}{2}\pi = \pi, \pm \frac{5}{2}\pi, \pm \frac{7}{2}\pi = 2\pi$ , y así sucesivamente. Véase la **FIGURA 9.2.7**.



**FIGURA 9.2.7** Comparación de las gráficas de  $y = \operatorname{sen} x$  y  $y = \operatorname{sen} 2x$

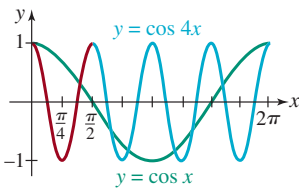
■ **Gráficas de  $y = A \operatorname{sen} Bx$  y  $y = A \cos Bx$**  Ahora examinaremos la gráfica de  $y = \operatorname{sen} Bx$  para  $B > 0$ . La función tiene amplitud 1, porque  $A = 1$ . Como el periodo de  $y = \operatorname{sen} x$  es  $2\pi$ , un ciclo de la gráfica de  $y = \operatorname{sen} Bx$  comienza en  $x = 0$  y se comenzarán a repetir sus valores cuando  $Bx = 2\pi$ . En otras palabras, un ciclo de la función  $y = \operatorname{sen} Bx$  se completa en el intervalo definido por  $0 \leq Bx \leq 2\pi$ . Esta desigualdad se divide entre  $B$ , y se ve que el **periodo** de la función  $y = \operatorname{sen} Bx$  es  $2\pi/B$ , y que la gráfica en el intervalo  $[0, 2\pi/B]$  es un **ciclo** de su gráfica. Por ejemplo, el periodo de  $y = \operatorname{sen} 2x$  es  $2\pi/2 = \pi$ , por lo que un ciclo de la gráfica se completa en el intervalo  $[0, \pi]$ . La figura 9.2.7 muestra que se completan dos ciclos de la gráfica de  $y = \operatorname{sen} 2x$  (en rojo y en azul) en el intervalo  $[0, 2\pi]$ , mientras que la gráfica de  $y = \operatorname{sen} x$  (en verde) ha completado sólo un ciclo. En términos de transformaciones, se puede caracterizar el ciclo de  $y = \operatorname{sen} 2x$  en  $[0, \pi]$  como una **compresión horizontal** del ciclo de  $y = \operatorname{sen} x$  en  $[0, 2\pi]$ .

En resumen, las gráficas de

$$y = A \operatorname{sen} Bx \quad \text{y} \quad y = A \cos Bx$$

para  $B > 0$  tienen amplitud  $|A|$  y periodo  $2\pi/B$ , las dos.

Tenga cuidado aquí;  $\operatorname{sen} 2x \neq 2 \operatorname{sen} x$ .



**FIGURA 9.2.8** Gráfica de la función del ejemplo 2

### EJEMPLO 2 Gráfica del coseno comprimida horizontalmente

Determinar el periodo de  $y = \cos 4x$  y graficar la función.

**Solución** En razón de que  $B = 4$ , se ve que el periodo de  $y = \cos 4x$  es  $2\pi/4 = \pi/2$ . Se llega a la conclusión que la gráfica de  $y = \cos 4x$  es la de  $y = \cos x$  comprimida horizontalmente. Para graficar la función se traza un ciclo del coseno con amplitud 1 en el intervalo  $[0, \pi/2]$  y a continuación se usa la periodicidad para extender la gráfica. La **FIGURA 9.2.8** muestra cuatro ciclos completos de  $y = \cos 4x$  (el ciclo básico en rojo, y la gráfica

extendida en azul) y un ciclo de  $y = \cos x$  (en verde) en  $[0, 2\pi]$ . Nótese que  $y = \cos 4x$  llega a su mínimo en  $x = \pi/4$ , porque  $\cos 4(\pi/4) = \cos \pi = -1$ , y llega a su máximo en  $x = \pi/2$ , porque  $\cos 4(\pi/2) = \cos 2\pi = 1$ . ≡

Si  $B < 0$  en  $y = A \sin Bx$  o  $y = A \cos Bx$ , se pueden usar las propiedades par/impar (vea (8) de la sección 9.1) para escribir la función con  $B$  positiva. Esto se ve en el siguiente ejemplo.

### EJEMPLO 3 Gráfica del seno estirada horizontalmente

Determinar la amplitud y el periodo de  $y = \sin(-\frac{1}{2}x)$ . Graficar la función.

**Solución** Como se requiere que  $B > 0$ , usaremos  $\sin(-x) = -\sin x$  para reformular la función como sigue:

$$y = \sin\left(-\frac{1}{2}x\right) = -\sin \frac{1}{2}x.$$

Si se identifica  $A = -1$ , se ve que la amplitud es  $|A| = |-1| = 1$ . Ahora bien, con  $B = \frac{1}{2}$ , se ve que el periodo es  $2\pi/\frac{1}{2} = 4\pi$ . Por consiguiente se puede interpretar al ciclo de  $y = -\sin \frac{1}{2}x$  en  $[0, 4\pi]$  como un estiramiento horizontal y una reflexión (en el eje  $x$ , porque  $A < 0$ ) del ciclo de  $y = \sin x$  en  $[0, 2\pi]$ . La FIGURA 9.2.9 muestra que en el intervalo  $[0, 4\pi]$ , la gráfica de  $y = -\sin \frac{1}{2}x$  (en azul) completa un ciclo, mientras que la gráfica de  $y = \sin x$  (en verde) hace dos ciclos. ≡

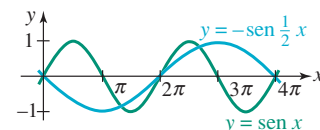


FIGURA 9.2.9 Gráfica de la función del ejemplo 3

■ **Gráficas de  $y = A \sin(Bx + C)$  y  $y = A \cos(Bx + C)$**  Hemos visto que las gráficas básicas de  $y = \sin x$  y  $y = \cos x$  se pueden estirar o comprimir verticalmente ( $y = A \sin x$  y  $y = A \cos x$ ), se pueden desplazar verticalmente ( $y = A \sin x + D$  y  $y = A \cos x + D$ ), y estirarse o comprimirse horizontalmente ( $y = A \sin Bx + D$  y  $y = A \cos Bx + D$ ). Las gráficas de

$$y = A \sin(Bx + C) + D \quad \text{y} \quad y = A \cos(Bx + C) + D$$

son las gráficas de  $y = A \sin Bx + D$  y  $y = A \cos Bx + D$  desplazadas horizontalmente.

En el resto de esta descripción nos concentraremos en las gráficas de  $y = A \sin(Bx + C)$  y  $y = A \cos(Bx + C)$ . Por ejemplo, de acuerdo con la sección 5.2, la gráfica de  $y = \cos(x - \pi/2)$  es la gráfica básica del coseno desplazada hacia la derecha. En la FIGURA 9.2.10 la gráfica de  $y = \cos(x - \pi/2)$  (en rojo) en el intervalo  $[0, 2\pi]$  es un ciclo de  $y = \cos x$  en el intervalo  $[-\pi/2, 3\pi/2]$  (en azul), pero desplazada horizontalmente  $\pi/2$  unidades hacia la derecha. De igual modo, las gráficas de  $y = \sin(x + \pi/2)$  y  $y = \sin(x - \pi/2)$  son las gráficas básicas del seno desplazadas  $\pi/2$  unidades hacia la izquierda y hacia la derecha, respectivamente. Véanse las FIGURAS 9.2.11 y 9.2.12.

Si se comparan las gráficas en rojo de las figuras 9.2.10 a 9.2.12 con las gráficas de las figuras 9.2.2 y 9.2.3, se ve que

- la gráfica del coseno desplazada  $\pi/2$  unidades hacia la derecha es la gráfica del seno,

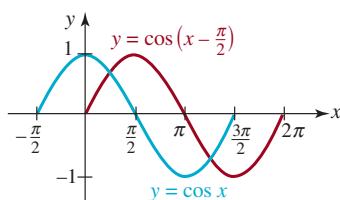


FIGURA 9.2.10 Gráfica del seno desplazada horizontalmente

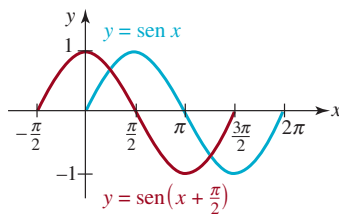


FIGURA 9.2.11 Gráfica del seno desplazada horizontalmente

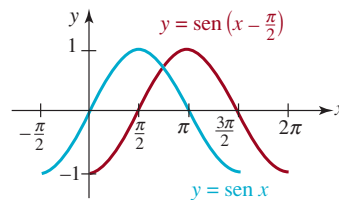


FIGURA 9.2.12 Senoide desplazada horizontalmente

- la gráfica del seno desplazada  $\pi/2$  unidades hacia la izquierda es la gráfica del coseno y
- la gráfica del seno desplazada  $\pi/2$  unidades hacia la derecha es la gráfica del coseno reflejada en el eje  $x$ .

En otras palabras, hemos comprobado gráficamente las identidades

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen} x, \quad \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos x. \quad (3)$$

Ahora examinaremos la gráfica de  $y = A \operatorname{sen}(Bx + C)$  para  $B > 0$ . Como los valores de  $\operatorname{sen}(Bx + C)$  van de  $-1$  a  $1$ , entonces  $A \operatorname{sen}(Bx + C)$  varía entre  $-A$  y  $A$ . Esto es, la **amplitud** de  $y = A \operatorname{sen}(Bx + C)$  es  $|A|$ . También, como  $Bx + C$  varía de  $0$  a  $2\pi$ , la gráfica hace un ciclo completo. Al resolver  $Bx + C = 0$  y  $Bx + C = 2\pi$ , se ve que un ciclo se completa cuando  $x$  varía de  $-C/B$  hasta  $(2\pi - C)/B$ . Por consiguiente, la función  $y = A \operatorname{sen}(Bx + C)$  tiene como **periodo**

$$\frac{2\pi - C}{B} - \left(-\frac{C}{B}\right) = \frac{2\pi}{B}.$$

Además, si  $f(x) = A \operatorname{sen} Bx$ , entonces

$$f\left(x + \frac{C}{B}\right) = A \operatorname{sen} B\left(x + \frac{C}{B}\right) = A \operatorname{sen}(Bx + C). \quad (4)$$

El resultado de (4) indica que se puede obtener la gráfica de  $y = A \operatorname{sen}(Bx + C)$  desplazando la gráfica de  $f(x) = A \operatorname{sen} Bx$  horizontalmente, una distancia  $|C|/B$ . Si  $C < 0$ , el desplazamiento es hacia la derecha, mientras que si  $C > 0$ , el desplazamiento es hacia la izquierda. El número  $|C|/B$  se llama **desplazamiento de fase**, o desfase, de la gráfica de  $y = A \operatorname{sen}(Bx + C)$ .

#### EJEMPLO 4 Ecuación de un coseno desplazado

La gráfica de  $y = 10 \cos 4x$  está desplazada  $\pi/12$  unidades hacia la derecha. Deducir su ecuación.

**Solución** Si se escribe  $f(x) = 10 \cos 4x$  y se aplica la ecuación (4), se ve que

$$f\left(x - \frac{\pi}{12}\right) = 10 \cos 4\left(x - \frac{\pi}{12}\right) \quad \text{o sea} \quad y = 10 \cos\left(4x - \frac{\pi}{3}\right).$$

En la última ecuación se identificaría a  $C = -\pi/3$ . El desplazamiento de fase es  $\pi/12$ .  $\equiv$

Téngalo en cuenta.

► Como cosa práctica, el desplazamiento de fase de  $y = A \operatorname{sen}(Bx + C)$  se puede obtener sacando  $B$  como factor común de  $Bx + C$ .

$$y = A \operatorname{sen}(Bx + C) = A \operatorname{sen} B\left(x + \frac{C}{B}\right).$$

Por comodidad, resumiremos la información anterior.

#### GRÁFICAS DE UN SENO O COSENO DESPLAZADAS

Las gráficas de

$$y = A \operatorname{sen}(Bx + C) \quad \text{y} \quad y = A \cos(Bx + C), \quad B > 0,$$

son, respectivamente, las de  $y = A \operatorname{sen} Bx$  y  $y = A \cos Bx$ , desplazadas horizontalmente  $|C|/B$ . El desplazamiento es hacia la derecha si  $C < 0$ , y hacia la izquierda si  $C > 0$ . El número  $|C|/B$  se llama **desplazamiento de fase**. La **amplitud** de cada gráfica es  $|A|$  y el **periodo** de cada gráfica es  $2\pi/B$ .

### EJEMPLO 5 Gráfica del seno desplazada horizontalmente

Graficar  $y = 3 \operatorname{sen}(2x - \pi/3)$ .

**Solución** Para comparar, primero graficaremos  $y = 3 \operatorname{sen} 2x$ . La amplitud de  $y = 3 \operatorname{sen} 2x$  es  $|A| = 3$ , y su periodo es  $2\pi/2 = \pi$ . Así, un ciclo de  $y = 3 \operatorname{sen} 2x$  se completa en el intervalo  $[0, \pi]$ . Entonces, extendemos la gráfica hacia el intervalo adyacente  $[\pi, 2\pi]$ , como se indica en azul en la FIGURA 9.2.13. A continuación se vuelve a escribir  $y = 3 \operatorname{sen}(2x - \pi/3)$  sacando 2 como factor común de  $2x - \pi/3$ :

$$y = 3 \operatorname{sen}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 3 \operatorname{sen} 2\left(x - \frac{\pi}{6}\right).$$

En esta última forma se ve que el desplazamiento de fase es  $\pi/6$ . La gráfica de la función dada, que se ve en rojo en la figura 9.2.13, se obtiene desplazando  $\pi/6$  unidades hacia la derecha la gráfica de  $y = 3 \operatorname{sen} 2x$ . Recuerde que eso quiere decir que si  $(x, y)$  es un punto en la gráfica en azul, entonces  $(x + \pi/6, y)$  es el punto correspondiente en la gráfica roja. Por ejemplo,  $x = 0$  y  $x = \pi$  son dos coordenadas  $x$  de intersecciones con el eje  $x$  de la gráfica en azul. Por consiguiente,  $x = 0 + \pi/6 = \pi/6$  y  $x = \pi + \pi/6 = 7\pi/6$  son coordenadas  $x$  de intersecciones con el eje  $x$  de la gráfica en rojo, desplazada. Estos números se indican con flechas en la figura 9.2.13. ≡

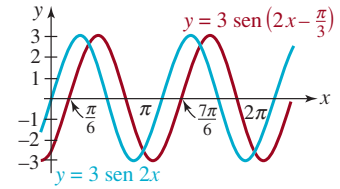


FIGURA 9.2.13 Gráfica de la función del ejemplo 5

### EJEMPLO 6 Gráficas desplazadas horizontalmente

Determinar la amplitud, el periodo, el desplazamiento de fase y la dirección del desplazamiento horizontal de cada una de las funciones siguientes.

a)  $y = 15 \cos\left(5x - \frac{3\pi}{2}\right)$       b)  $y = -8 \operatorname{sen}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$

**Solución**

a) Primero se identifican  $A = 15$ ,  $B = 5$  y  $C = -3\pi/2$ . Entonces, la amplitud es  $|A| = 15$ , y el periodo es  $2\pi/B = 2\pi/5$ . El desplazamiento de fase se puede calcular ya sea por  $(-3\pi/2)/5 = -3\pi/10$ , o bien ordenando la función como sigue:

$$y = 15 \cos 5\left(x - \frac{3\pi}{10}\right).$$

La última forma indica que la gráfica de  $y = 15 \cos(5x - 3\pi/2)$  es la gráfica de  $y = 15 \cos 5x$  desplazada  $3\pi/10$  unidades hacia la derecha.

b) Como  $A = -8$ , la amplitud es  $|A| = |-8| = 8$ . Con  $B = 2$ , el periodo es  $2\pi/2 = \pi$ . El 2 se saca como factor común de  $2x + \pi/4$ , y queda

$$y = -8 \operatorname{sen}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = -8 \operatorname{sen} 2\left(x + \frac{\pi}{8}\right)$$

y se ve que el desplazamiento de fase es  $\pi/8$ . La gráfica de  $y = -8 \operatorname{sen}(2x + \pi/4)$  es la de  $y = -8 \operatorname{sen} 2x$  desplazada  $\pi/8$  unidades hacia la izquierda. ≡

### EJEMPLO 7 Gráfica del coseno desplazada horizontalmente

Graficar  $y = 2 \cos(\pi x + \pi)$ .

**Solución** La amplitud de  $y = 2 \cos \pi x$  es  $|A| = 2$ , y el periodo es  $2\pi/\pi = 2$ . Entonces, un ciclo de  $y = 2 \cos \pi x$  se completa en el intervalo  $[0, 2]$ . En la FIGURA 9.2.14 se muestran dos ciclos de la gráfica de  $y = 2 \cos \pi x$ . Las intersecciones con el eje  $x$  de esta gráfica corresponden a los valores de  $x$  para los cuales  $\cos \pi x = 0$ . De acuerdo con (2), eso quiere decir que  $\pi x = (2n + 1)\pi/2$ , o sea  $x = (2n + 1)/2$ ,  $n$  un entero. En otras palabras, para  $n = 0, -1, 1, -2, 2, -3, \dots$  se ve que  $x = \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{5}{2}$ , y así sucesivamente. Ahora, si se reacomoda la función dada como sigue:

$$y = 2 \cos \pi(x + 1)$$

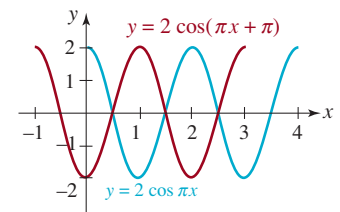


FIGURA 9.2.14 Gráfica de la función del ejemplo 7

se ve que el desplazamiento de fase es 1. La gráfica de  $y = 2 \cos(\pi x + \pi)$  (en rojo) en la figura 9.2.14 se obtiene desplazando la gráfica de  $y = 2 \cos \pi x$  una unidad hacia la izquierda. Eso quiere decir que las intersecciones con el eje  $x$  son iguales para ambas gráficas.  $\equiv$

### EJEMPLO 8 Corriente alterna

La corriente  $I$  (en amperes) que pasa por un conductor de un circuito de corriente alterna se determina con  $I(t) = 30 \sin 120\pi t$ , donde  $t$  es el tiempo expresado en segundos. Trazar el ciclo de la gráfica. ¿Cuál es el valor máximo de la corriente?

**Solución** La gráfica tiene una amplitud de 30, y su periodo es  $2\pi/120\pi = \frac{1}{60}$ . Por consiguiente, se traza un ciclo de la gráfica del seno básica en el intervalo  $[0, \frac{1}{60}]$ , como se ve en la FIGURA 9.2.15. En la figura se ve que el valor máximo de la corriente es  $I = 30$  amperes, y se presenta cuando  $t = \frac{1}{240}$  de segundo, ya que

$$I\left(\frac{1}{240}\right) = 30 \sin\left(120\pi \cdot \frac{1}{240}\right) = 30 \sin \frac{\pi}{2} = 30. \quad \equiv$$

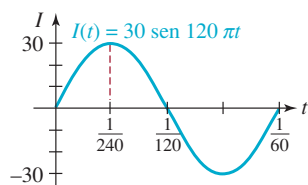


FIGURA 9.2.15 Gráfica de la corriente del ejemplo 8

## 9.2 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-22.

En los problemas 1 a 6 aplique las técnicas de desplazar, estirar, comprimir y reflejar, para trazar al menos un ciclo de la gráfica de la función.

1.  $y = \frac{1}{2} + \cos x$
2.  $y = -1 + \cos x$
3.  $y = 2 - \sin x$
4.  $y = 3 + 3 \sin x$
5.  $y = -2 + 4 \cos x$
6.  $y = 1 - 2 \sin x$

En los problemas 7 a 10, la figura muestra un ciclo de una senoide o cosenoide. De acuerdo con la figura, determine  $A$  y  $D$  y deduzca una ecuación de la forma  $y = A \sin x + D$ , o  $y = A \cos x + D$  de la gráfica.

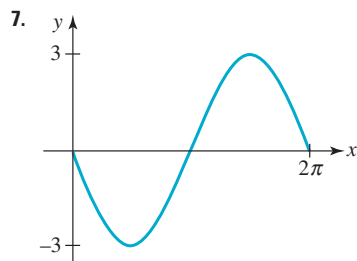


FIGURA 9.2.16 Gráfica del problema 7

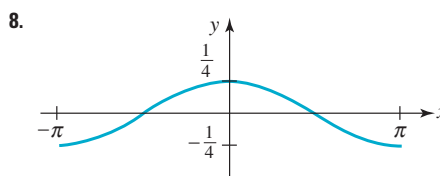


FIGURA 9.2.17 Gráfica del problema 8

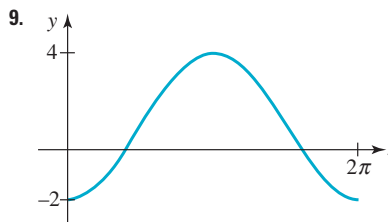


FIGURA 9.2.18 Gráfica del problema 9

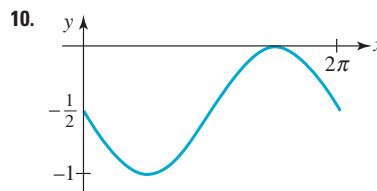


FIGURA 9.2.19 Gráfica del problema 10



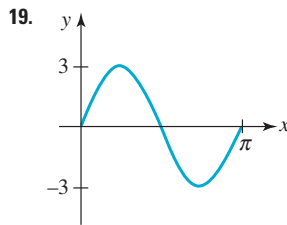
En los problemas 11 a 16, use las relaciones (1) y (2) de la sección 9.2 para determinar las intersecciones con el eje  $x$  de la gráfica de la función indicada. No trace la gráfica.

11.  $y = \text{sen } \pi x$
12.  $y = -\cos 2x$
13.  $y = 10 \cos \frac{x}{2}$
14.  $y = 3 \text{sen}(-5x)$
15.  $y = \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$
16.  $y = \cos(2x - \pi)$

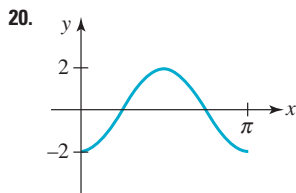
En los problemas 17 y 18, determine las intersecciones con el eje  $x$  de la gráfica de la función, en el intervalo  $[0, 2\pi]$ . A continuación, aplicando la periodicidad, determine todas las intersecciones.

17.  $y = -1 + \text{sen } x$
18.  $y = 1 - 2 \cos x$

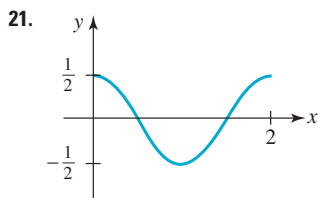
En los problemas 19 a 24, la figura muestra un ciclo de una gráfica del coseno o seno. De acuerdo con la figura, determine  $A$  y  $B$ , y deduzca una ecuación de la forma  $y = A \text{sen } Bx$  o  $y = A \cos Bx$  de la gráfica.



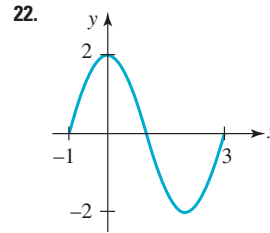
**FIGURA 9.2.20** Gráfica del problema 19



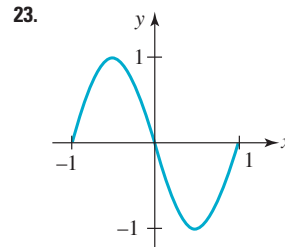
**FIGURA 9.2.21** Gráfica del problema 20



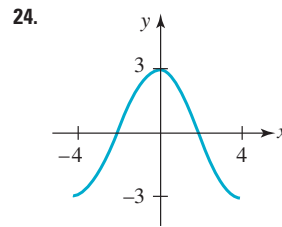
**FIGURA 9.2.22** Gráfica del problema 21



**FIGURA 9.2.23** Gráfica del problema 22



**FIGURA 9.2.24** Gráfica del problema 23



**FIGURA 9.2.25** Gráfica del problema 24

En los problemas 25 a 32, determine la amplitud y el periodo de la función. Trace cuando menos un ciclo de la gráfica.

25.  $y = 4 \text{sen } \pi x$
26.  $y = -5 \text{sen } \frac{x}{2}$
27.  $y = -3 \cos 2\pi x$
28.  $y = \frac{5}{2} \cos 4x$
29.  $y = 2 - 4 \text{sen } x$
30.  $y = 2 - 2 \text{sen } \pi x$
31.  $y = 1 + \cos \frac{2x}{3}$
32.  $y = -1 + \text{sen } \frac{\pi x}{2}$

En los problemas 33 a 42, determine amplitud, periodo y desplazamiento de fase de la función. Trace al menos un ciclo de la gráfica.

33.  $y = \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$
34.  $y = \text{sen}\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$
35.  $y = \text{cos}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$
36.  $y = -2\text{cos}\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$
37.  $y = 4\text{cos}\left(2x - \frac{3\pi}{2}\right)$
38.  $y = 3\text{sen}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$
39.  $y = 3\text{sen}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right)$
40.  $y = -\text{cos}\left(\frac{x}{2} - \pi\right)$
41.  $y = -4\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}x - \frac{\pi}{3}\right)$
42.  $y = 2\text{cos}\left(-2\pi x - \frac{4\pi}{3}\right)$

En los problemas 43 y 44, escriba la ecuación de la función cuya gráfica se describe en palabras.

43. La gráfica de  $y = \text{cos } x$  se estira verticalmente por un factor de 3, y a continuación se desplaza 5 unidades hacia abajo. Un ciclo de  $y = \text{cos } x$  en  $[0, 2\pi]$  se comprime a  $[0, \pi/3]$  y el ciclo comprimido se desplaza  $\pi/4$  unidades horizontalmente hacia la izquierda.
44. Un ciclo de  $y = \text{sen } x$  en  $[0, 2\pi]$  se estira hasta  $[0, 8\pi]$  y a continuación, el ciclo estirado se desplaza  $\pi/12$  unidades horizontalmente hacia la derecha. La gráfica también se comprime verticalmente por un factor de  $\frac{3}{4}$ , y a continuación se refleja en el eje  $x$ .

En los problemas 45 a 48, determine las funciones seno y coseno, desplazadas horizontalmente, de manera que cada función satisfaga las condiciones dadas. Grafique las funciones.

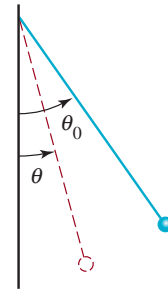
45. Amplitud 3, periodo  $2\pi/3$ , desplazada  $\pi/3$  unidades hacia la derecha.
46. Amplitud  $\frac{2}{3}$ , periodo  $\pi$ , desplazada  $\pi/4$  unidades hacia la izquierda.
47. Amplitud 0.7, periodo 0.5, desplazada 4 unidades hacia la derecha.
48. Amplitud  $\frac{5}{4}$ , periodo 4, desplazada  $1/2\pi$  unidades hacia la izquierda.

En los problemas 49 y 50, verifique gráficamente la identidad.

49.  $\text{cos}(x + \pi) = -\text{cos } x$
50.  $\text{sen}(x + \pi) = -\text{sen } x$

### ≡ Aplicaciones diversas

51. **Péndulo** El desplazamiento angular  $\theta$  de un péndulo, respecto a la vertical en el momento  $t$  segundos, se determina con  $\theta(t) = \theta_0 \cos \omega t$ , donde  $\theta_0$  es el desplazamiento inicial cuando  $t = 0$  segundos. Véase la **FIGURA 9.2.26**. Para  $\omega = 2 \text{ rad/s}$  y  $\theta_0 = \pi/10$ , trace dos ciclos de la función resultante.



**FIGURA 9.2.26** Péndulo del problema 51

52. **Corriente** En cierto circuito eléctrico, la corriente  $I$ , en amperes, cuando el tiempo es  $t$ , en segundos es

$$I(t) = 10 \cos\left(120\pi t + \frac{\pi}{3}\right).$$

Trace dos ciclos de la gráfica de  $I$  en función del tiempo  $t$ .

53. **Profundidad del agua** La profundidad  $d$  del agua, a la entrada de un puerto pequeño cuando el tiempo es  $t$ , se modela con una función de la forma

$$d(t) = A \text{sen} B\left(t - \frac{\pi}{2}\right) + C,$$

donde  $A$  es la mitad de la diferencia entre las profundidades cuando las mareas son altas y bajas;  $2\pi/B$ ,  $B > 0$ , es el periodo de la marea y  $C$  es la profundidad promedio. Suponga que el periodo de la marea es de 12 horas, que la profundidad en la pleamar (marea alta) es de 18 pies, y que en la bajamar es de 6 pies. Trace dos ciclos de la gráfica de  $d$ .

54. **Temperatura Fahrenheit** Suponga que

$$T(t) = 50 + 10 \text{sen} \frac{\pi}{12}(t - 8),$$

$0 \leq t \leq 24$  es un modelo matemático de la temperatura Fahrenheit a las  $t$  horas después de medianoche, en cierto día de la semana.

- a) ¿Cuál es la temperatura a las 8 a.m.?  
 b) ¿A cuál o cuáles horas  $T(t) = 60$ ?  
 c) Trace la gráfica de  $T$ .  
 d) Calcule las temperaturas máxima y mínima, y los tiempos en que se presentan.

$$57. f(x) = 1 + (\cos x)^2$$

$$58. f(x) = x \operatorname{sen} x$$

### ≡ Problemas para calculadora

En los problemas 55 a 58, use una calculadora para investigar si la función es periódica.

$$55. f(x) = \operatorname{sen} \left( \frac{1}{x} \right)$$

$$56. f(x) = \frac{1}{\operatorname{sen} 2x}$$

### ≡ Para la discusión

En los problemas 59 y 60, busque el periodo de la función dada.

$$59. f(x) = \operatorname{sen} \frac{1}{2} x \operatorname{sen} 2x$$

$$60. f(x) = \operatorname{sen} \frac{3}{2} x + \operatorname{cos} \frac{5}{2} x$$

## 9.3 Gráficas de otras funciones trigonométricas

■ **Introducción** Se definen cuatro funciones trigonométricas más, en términos de recíprocos y cocientes de las funciones seno y coseno. En esta sección examinaremos las propiedades y las gráficas de estas nuevas funciones.

Comenzaremos con unas definiciones.

### Definición 9.3.1 Otras cuatro funciones trigonométricas

Las funciones **tangente**, **cotangente**, **secante** y **cosecante** se representan por  $\tan x$ ,  $\cot x$ ,  $\sec x$  y  $\csc x$ , respectivamente, y se definen como sigue:

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x}, \quad \cot x = \frac{\operatorname{cos} x}{\operatorname{sen} x}, \quad (1)$$

$$\sec x = \frac{1}{\operatorname{cos} x}, \quad \csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}. \quad (2)$$

Observe que las funciones tangente y cotangente se relacionan como sigue:

$$\cot x = \frac{\operatorname{cos} x}{\operatorname{sen} x} = \frac{1}{\frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x}} = \frac{1}{\tan x}.$$

De acuerdo con las definiciones en (2) y con el resultado anterior,  $\cot x$ ,  $\sec x$  y  $\csc x$  se llaman **funciones recíprocas**.

■ **Dominio y contradominio** Debido a que las funciones en (1) y (2) son cocientes, el **dominio** de cada función consiste en el conjunto de los números reales, excepto aquellos números para los cuales el denominador es cero. Hemos visto en (2), de la sección 9.2, que  $\cos x = 0$  cuando  $x = (2n + 1)\pi/2$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , y así

- el dominio de  $\tan x$  y de  $\sec x$  es  $\{x \mid x \neq (2n + 1)\pi/2, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ .

De igual manera, de acuerdo con (1) de la sección 9.2,  $\operatorname{sen} x = 0$  para  $x = n\pi$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , por lo que

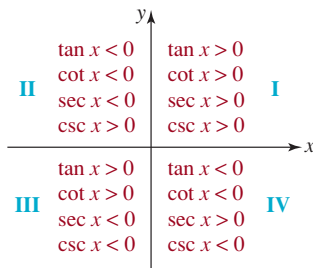
- el dominio de  $\cot x$  y de  $\csc x$  es  $\{x \mid x \neq n\pi, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ .

Ya sabemos que los valores de las funciones seno y coseno están acotados, esto es, que  $|\sen x| \leq 1$  y  $|\cos x| \leq 1$ . De acuerdo con estas desigualdades,

$$|\sec x| = \left| \frac{1}{\cos x} \right| = \frac{1}{|\cos x|} \geq 1 \quad (3)$$

y

$$|\csc x| = \left| \frac{1}{\sen x} \right| = \frac{1}{|\sen x|} \geq 1. \quad (4)$$



**FIGURA 9.3.1** Signos de las funciones  $\tan x$ ,  $\cot x$ ,  $\sec x$  y  $\csc x$  en los cuatro cuadrantes

Recuerde que una desigualdad como (3) quiere decir que  $\sec x \geq 1$ , o  $\sec x \leq -1$ . Por consiguiente, el contradominio de la función secante es  $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ . La desigualdad en (4) implica que la función cosecante tiene el mismo contradominio  $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ . Cuando se consideran las gráficas de las funciones tangente y cotangente se ve que tienen el mismo contradominio:  $(-\infty, \infty)$ .

Si se interpreta a  $x$  como un ángulo, la **FIGURA 9.3.1** ilustra los signos algebraicos de las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante en cada uno de los cuatro cuadrantes. Se verifican con facilidad usando los signos de las funciones seno y coseno que aparecen en la figura 9.1.4.

### EJEMPLO 1 Regreso al ejemplo 3 de la sección 9.1

Determinar  $\tan x$ ,  $\cot x$ ,  $\sec x$  y  $\csc x$  para  $x = -\pi/6$ .

**Solución** En el ejemplo 3 de la sección 9.1 se vio que

$$\sen\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sen\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Por consiguiente, de acuerdo con las definiciones en (1) y (2):

$$\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{-1/2}{\sqrt{3}/2} = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \cot\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}/2}{-1/2} = -\sqrt{3}, \quad \leftarrow \text{También se podría haber usado } \cot x = 1/\tan x$$

$$\sec\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}/2} = \frac{2}{\sqrt{3}}, \quad \csc\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{-1/2} = -2. \quad \equiv$$

La tabla 9.3.1, que resume algunos valores importantes de la tangente, cotangente, secante y cosecante, se formó usando los valores de seno y coseno de la sección 9.3. Un guión en la tabla indica que la función trigonométrica no está definida en ese valor de  $x$  en particular.

**Periodicidad** Como las funciones seno y coseno son periódicas cada  $2\pi$ , cada una de las funciones en (1) y en (2) tienen un periodo de  $2\pi$ . Pero, de acuerdo con el teorema 9.1.3 de la sección 9.1,

$$\tan(x + \pi) = \frac{\overbrace{\sen(x + \pi)}^{iv) \text{ del teorema 9.1.3}}}{\underbrace{\cos(x + \pi)}_{iii) \text{ del teorema 9.1.3}}} = \frac{-\sen x}{-\cos x} = \tan x. \quad (5)$$

Entonces, la expresión (5) implica que  $\tan x$  y  $\cot x$  son periódicas, con un periodo  $p \leq \pi$ . En el caso de la función tangente,  $\tan x = 0$  sólo si  $\sen x = 0$ ; esto es, sólo si  $x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi$  y así sucesivamente. Por consiguiente, el número  $p$  positivo menor para el cual  $\tan(x + p) = \tan x$  es  $p = \pi$ . La función cotangente tiene el mismo periodo, porque es recíproca de la función tangente.

Las funciones secante y cosecante son periódicas, con **periodo**  $2\pi$ . Por consiguiente,

$$\sec(x + 2\pi) = \sec x \quad \text{y} \quad \csc(x + 2\pi) = \csc x \quad (6)$$

para todo número real  $x$  para el cual estén definidas las funciones.

**TABLA 9.3.1**

$x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	—
$\cot x$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
$\sec x$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	—
$\csc x$	—	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1

Véanse también los problemas 49 y 50 en los ejercicios 9.2.

Las funciones tangente y cotangente son periódicas, con **periodo  $\pi$** . Por consiguiente,

$$\tan(x + \pi) = \tan x \quad \text{y} \quad \cot(x + \pi) = \cot x \quad (7)$$

para todo número real  $x$  para el cual estén definidas las funciones.

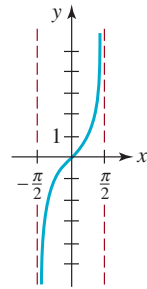
■ **Gráficas de  $y = \tan x$  y  $y = \cot x$**  Los números que hacen que los denominadores de  $\tan x$ ,  $\cot x$ ,  $\sec x$  y  $\csc x$  sean iguales a cero corresponden a asíntotas verticales en sus gráficas. Por ejemplo, recomendamos al lector que con una calculadora verifique que

$$\tan x \rightarrow -\infty \text{ como } x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+ \quad \text{y} \quad \tan x \rightarrow \infty \text{ como } x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-$$

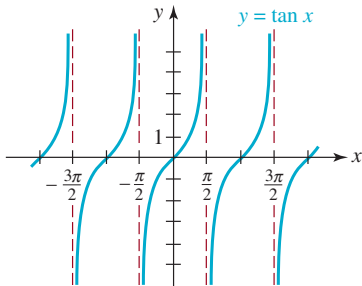
En otras palabras,  $x = -\pi/2$  y  $x = \pi/2$  son asíntotas verticales. La gráfica de  $y = \tan x$  en el intervalo  $(-\pi/2, \pi/2)$ , que muestra la **FIGURA 9.3.2** es un **ciclo** de la gráfica de  $y = \tan x$ . Aplicando la periodicidad se puede extender el ciclo de la figura 9.3.2 a intervalos adyacentes de longitud  $\pi$ , que se ven en la **FIGURA 9.3.3**. Las intersecciones con el eje  $x$  en la gráfica de la función tangente están en  $(0, 0)$ ,  $(\pm\pi, 0)$ ,  $(\pm2\pi, 0)$ ,  $\dots$ , y las asíntotas verticales de la gráfica son  $x = \pm\pi/2, \pm3\pi/2, \pm5\pi/2, \dots$

La gráfica de  $y = \cot x$  se parece a la gráfica de la función tangente, véase la **FIGURA 9.3.4**. En este caso, la gráfica de  $y = \cot x$  en el intervalo  $(0, \pi)$  es un **ciclo** de la gráfica de  $y = \cot x$ . Las intersecciones con el eje  $x$  de la función cotangente están en  $(\pm\pi/2, 0)$ ,  $(\pm3\pi/2, 0)$ ,  $(\pm5\pi/2, 0)$ ,  $\dots$  y las asíntotas verticales de la gráfica son  $x = 0, \pm\pi, \pm2\pi, \pm3\pi, \dots$

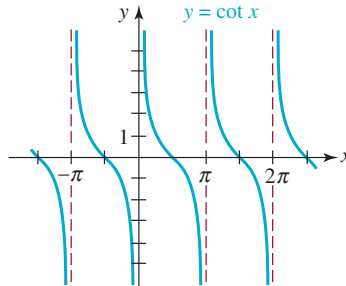
◀ Es un buen momento para repasar el recuadro (7) de la sección 6.6.



**FIGURA 9.3.2** Un ciclo de la gráfica de  $y = \tan x$



**FIGURA 9.3.3** Gráfica de  $y = \tan x$



**FIGURA 9.3.4** Gráfica de  $y = \cot x$

Note que las gráficas de  $y = \tan x$  y  $y = \cot x$  son simétricas con respecto al origen, porque  $\tan(-x) = -\tan x$ , y  $\cot(-x) = -\cot x$ .

**Teorema 9.3.1 Funciones impares**

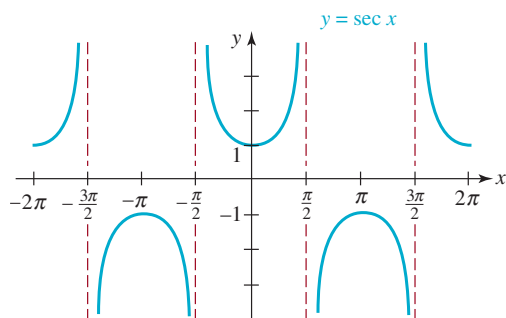
La función tangente  $f(x) = \tan x$  y la función cotangente  $g(x) = \cot x$  son funciones **impares** tales que

$$\tan(-x) = -\tan x \quad \text{y} \quad \cot(-x) = -\cot x \quad (8)$$

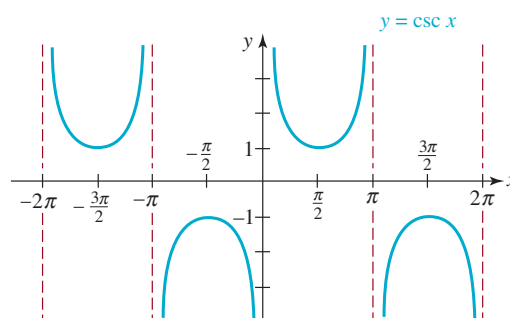
para todo número real  $x$  cuyas funciones están definidas.

■ **Gráficas de  $\sec x$  y  $\csc x$**  Ya se sabe que para  $y = \sec x$  y  $y = \csc x$ ,  $|y| \geq 1$ , por lo que no puede haber alguna parte de sus gráficas en la faja horizontal  $-1 < y < 1$  en el plano cartesiano. Por consiguiente, las gráficas de  $y = \sec x$  y  $y = \csc x$  no tienen intersecciones con el eje  $x$ . Tanto  $y = \sec x$  como  $y = \csc x$  tienen el periodo  $2\pi$ . Las asíntotas verticales de la gráfica de  $y = \sec x$  son las mismas que las de  $y = \tan x$ , es decir,  $x = \pm\pi/2, \pm3\pi/2, \pm5\pi/2, \dots$ . Como  $y = \cos x$  es una función par, también lo es  $y = \sec x = 1/\cos x$ . La gráfica

de  $y = \sec x$  es simétrica con respecto al eje  $y$ . Por otra parte, las asíntotas verticales de la gráfica de  $y = \csc x$  son iguales a las de  $y = \cot x$ , es decir,  $x = 0, \pm\pi, \pm2\pi, \pm3\pi, \dots$ . Como  $y = \sec x$  es una función impar, también lo es  $y = \csc x = 1/\sin x$ . La gráfica de  $y = \csc x$  es simétrica con respecto al origen. Un ciclo de la gráfica de  $y = \sec x$  en  $[0, 2\pi]$  se extiende al intervalo  $[-2\pi, 0]$  por la periodicidad (o la simetría con respecto al eje  $y$ ) en la **FIGURA 9.3.5**. De igual modo, en la **FIGURA 9.3.6** se extendió un ciclo de  $y = \csc x$  en  $(0, 2\pi)$  al intervalo  $(-2\pi, 0)$ , por periodicidad (o por simetría con respecto al origen).



**FIGURA 9.3.5** Gráfica de  $y = \sec x$



**FIGURA 9.3.6** Gráfica de  $y = \csc x$

■ **Transformaciones y gráficas** En forma parecida a las gráficas de seno y coseno, se pueden aplicar transformaciones rígidas y no rígidas a las gráficas de  $y = \tan x$ ,  $y = \cot x$ ,  $y = \sec x$  y  $y = \csc x$ . Por ejemplo, una función como  $y = A \tan(Bx + C) + D$  se puede analizar como sigue:

$$\begin{array}{ccc}
 \text{estiramiento/compresión/reflexión vertical} & & \text{desplazamiento vertical} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 y = A \tan(Bx + C) + D & & (9) \\
 \uparrow & \uparrow & \\
 \text{estiramiento/compresión horizontal al cambiar el periodo} & & \text{desplazamiento horizontal}
 \end{array}$$

Si  $B > 0$ , entonces el periodo de

$$y = A \tan(Bx + C) \quad \text{y} \quad y = A \cot(Bx + C) \text{ es } \pi/B, \quad (10)$$

mientras que el periodo de

$$y = A \sec(Bx + C) \quad \text{y} \quad y = A \csc(Bx + C) \text{ es } 2\pi/B. \quad (11)$$

De las seis funciones trigonométricas, sólo las funciones seno y coseno tienen amplitud.

► Como se vio en (9), el número  $A$  en cada caso se puede interpretar como un estiramiento o una compresión vertical de la gráfica. Sin embargo, debe uno tener en cuenta que las funciones en (10) y (11) no tienen amplitud, porque ninguna de ellas tiene un valor máximo ni un mínimo.

### EJEMPLO 2 Comparación de gráficas

Determinar el periodo, las intersecciones con el eje  $x$  y las asíntotas verticales de la gráfica de  $y = \tan 2x$ . Graficar la función en  $[0, \pi]$ .

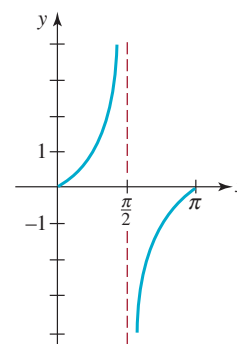
**Solución** Si hacemos que  $B = 2$ , se ve de (10) que el periodo es  $\pi/2$ . Como  $\tan 2x = \sin 2x / \cos 2x$ , las intersecciones con el eje  $x$  de la gráfica están en las raíces de  $\sin 2x$ . De acuerdo con (1), de la sección 9.2,  $\sin 2x = 0$  para

$$2x = n\pi \quad \text{de modo que} \quad x = \frac{1}{2}n\pi, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

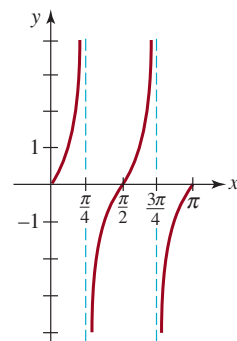
Esto es,  $x = 0, \pm\pi/2, \pm2\pi/2 = \pi, \pm3\pi/2, \pm4\pi/2 = 2\pi$ , y así sucesivamente. Las intersecciones con el eje  $x$  están en  $(0, 0), (\pm\pi/2, 0), (\pm\pi, 0), (\pm3\pi/2, 0), \dots$ . Las asíntotas verticales de la gráfica están en las raíces de  $\cos 2x = 0$ . De acuerdo con (2) de la sección 9.2, los números para los que  $\cos 2x = 0$  se determinan como sigue:

$$2x = (2n + 1)\frac{\pi}{2} \text{ de modo que } x = (2n + 1)\frac{\pi}{4}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Esto es, las asíntotas verticales son  $x = \pm\pi/4, \pm3\pi/4, \pm5\pi/4, \dots$ . En el intervalo  $[0, \pi]$ , la gráfica de  $y = \tan 2x$  tiene tres cruces con el eje  $y$  en  $(0, 0), (\pi/2, 0)$  y  $(\pi, 0)$ , y dos asíntotas verticales,  $x = \pi/4$  y  $x = 3\pi/4$ . En la FIGURA 9.3.7 hemos comparado las gráficas de  $y = \tan x$  y  $y = \tan 2x$  en el mismo intervalo. La gráfica de  $y = \tan 2x$  es una compresión horizontal de la gráfica de  $y = \tan x$ . ≡



a)  $y = \tan x$  en  $[0, \pi]$



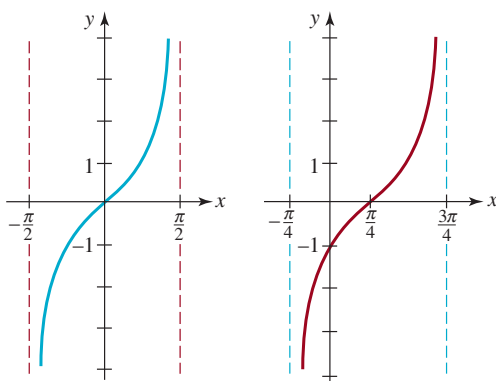
b)  $y = \tan 2x$  en  $[0, \pi]$

FIGURA 9.3.7 Gráfica de las funciones del ejemplo 2

### EJEMPLO 3 Comparación de gráficas

Comparar un ciclo de las gráficas de  $y = \tan x$  y  $y = \tan(x - \pi/4)$ .

**Solución** La gráfica de  $y = \tan(x - \pi/4)$  es la de  $y = \tan x$  desplazada horizontalmente  $\pi/4$  unidades hacia la derecha. La intersección,  $(0, 0)$ , de la gráfica de  $y = \tan x$ , se desplazan a  $(\pi/4, 0)$  en la gráfica de  $y = \tan(x - \pi/4)$ . Las asíntotas verticales  $x = -\pi/2$  y  $x = \pi/2$  para la gráfica de  $y = \tan x$  están desplazadas a  $x = -\pi/4$  y  $x = 3\pi/4$  de la gráfica de  $y = \tan(x - \pi/4)$ . En las FIGURAS 9.3.8a) y 9.3.8b) se ve, respectivamente, que un ciclo de la gráfica de  $y = \tan x$  en el intervalo  $(-\pi/2, \pi/2)$  está desplazado hacia la derecha formando un ciclo de la gráfica de  $y = \tan(x - \pi/4)$  en el intervalo  $(-\pi/4, 3\pi/4)$ .



a) Ciclo de  $y = \tan x$  en  $(-\pi/2, \pi/2)$

b) Ciclo de  $y = \tan(x - \pi/4)$  en  $(-\pi/4, 3\pi/4)$

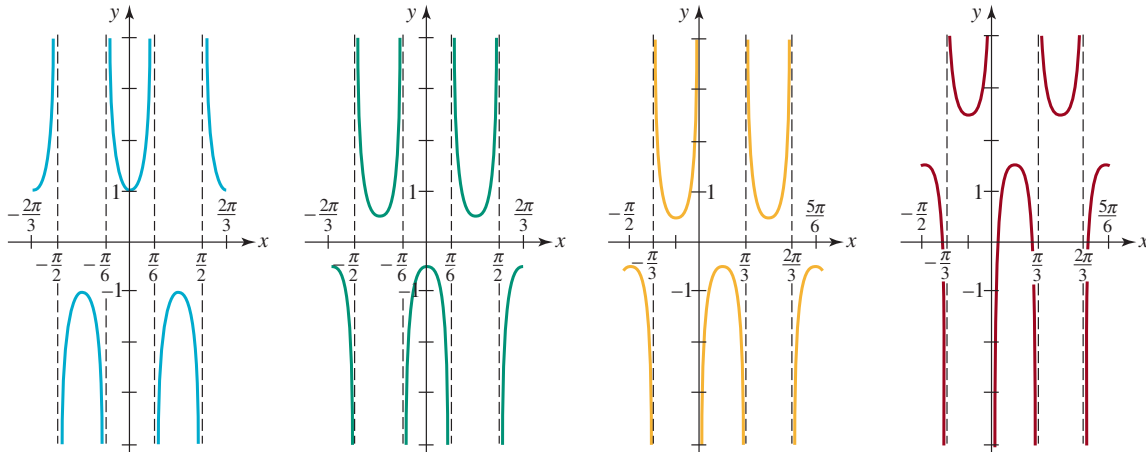
FIGURA 9.3.8 Gráfica de las funciones en el ejemplo 3 ≡

Como hicimos en el análisis de las gráficas de  $y = A \sin(Bx + C)$  y  $y = A \cos(Bx + C)$ , se puede determinar la cantidad de desplazamiento horizontal de gráficas de funciones como  $y = A \tan(Bx + C)$  y  $y = A \sec(Bx + C)$ , sacando el número  $B > 0$  como factor común de  $Bx + C$ .

### EJEMPLO 4 Dos desplazamientos y dos compresiones

Grficar  $y = 2 - \frac{1}{2}\sec(3x - \pi/2)$ .

**Solución** Descompondremos el análisis de la gráfica en cuatro partes, que serán por transformaciones.



a) Compresión horizontal      b) Compresión vertical y reflexión en el eje  $x$       c) Traslación horizontal      d) Traslación vertical

**FIGURA 9.3.9** Gráfica de la función del ejemplo 5

- i) Un ciclo de la gráfica de  $y = \sec x$  sucede en  $[0, 2\pi]$ . Como el periodo de  $y = \sec 3x$  es  $2\pi/3$ , un ciclo de su gráfica ocupa el intervalo  $[0, 2\pi/3]$ . En otras palabras, la gráfica de  $y = \sec 3x$  es una compresión horizontal de la gráfica de  $y = \sec x$ . Como  $\sec 3x = 1/\cos 3x$ , las asíntotas verticales están en las raíces de  $\cos 3x$ . De acuerdo con la sección 9.2, se ve que

$$3x = (2n + 1)\frac{\pi}{2} \quad \text{o sea que} \quad x = (2n + 1)\frac{\pi}{6}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

La **FIGURA 9.3.9a)** muestra dos ciclos de la gráfica de  $y = \sec 3x$ ; un ciclo en  $[-2\pi/3, 0]$  y otro en  $[0, 2\pi/3]$ . Dentro de esos intervalos, las asíntotas verticales son  $x = -\pi/2$ ,  $x = -\pi/6$ ,  $x = \pi/6$  y  $x = \pi/2$ .

- ii) La gráfica de  $y = -\frac{1}{2}\sec 3x$  es la de  $y = \sec 3x$  comprimida verticalmente por un factor de  $\frac{1}{2}$ , y después reflejada en el eje  $x$ . Véase la figura 9.3.9b).
- iii) Se saca a 3 como factor común de  $3x - \pi/2$ , y se ve en

$$y = -\frac{1}{2}\sec\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2}\sec 3\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

que la gráfica de  $y = -\frac{1}{2}\sec(3x - \pi/2)$  es la de  $y = -\frac{1}{2}\sec 3x$ , desplazada  $\pi/6$  unidades hacia la derecha. Si se desplazan los dos intervalos,  $[-2\pi/3, 0]$  y  $[0, 2\pi/3]$ , en la figura 9.3.9b),  $\pi/6$  unidades hacia la derecha, se ve en la figura 9.3.9c) que hay dos ciclos de  $y = -\frac{1}{2}\sec(3x - \pi/2)$  en los intervalos  $[-\pi/2, \pi/6]$  y  $[\pi/6, 5\pi/6]$ . Las asíntotas verticales  $x = -\pi/2$ ,  $x = -\pi/6$ ,  $x = \pi/6$  y  $x = \pi/2$  que se ven en la figura 9.3.9b) están desplazadas a  $x = -\pi/3$ ,  $x = 0$ ,  $x = \pi/3$  y  $x = 2\pi/3$ . Observe que la intersección con el eje  $y$  en  $(0, -\frac{1}{2})$  de la figura 9.3.9b) ahora se mueve a  $(\pi/6, -\frac{1}{2})$  en la figura 9.3.9c).

- iv) Por último se obtiene la gráfica  $y = 2 - \frac{1}{2}\sec(3x - \pi/2)$  de la figura 9.3.9d) desplazando la gráfica de  $y = -\frac{1}{2}\sec(3x - \pi/2)$  en la figura 9.3.9c), dos unidades hacia arriba. ≡



## 9.3 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-23.

En los problemas 1 y 2 llene la tabla respectiva.

1.

$x$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	$2\pi$
$\tan x$												
$\cot x$												

2.

$x$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	$2\pi$
$\sec x$												
$\csc x$												

En los problemas 3 a 18 determine el valor indicado sin usar una calculadora.

3.  $\cot \frac{13\pi}{6}$

4.  $\csc\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$

5.  $\tan \frac{9\pi}{2}$

6.  $\sec 7\pi$

7.  $\csc\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

8.  $\cot\left(-\frac{13\pi}{3}\right)$

9.  $\tan \frac{23\pi}{4}$

10.  $\tan\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$

11.  $\sec \frac{10\pi}{3}$

12.  $\cot \frac{17\pi}{6}$

13.  $\csc 5\pi$

14.  $\sec \frac{29\pi}{4}$

15.  $\sec(-120^\circ)$

16.  $\tan 405^\circ$

17.  $\csc 495^\circ$

18.  $\cot(-720^\circ)$

En los problemas 19 a 22 use la información para determinar los valores de las cinco funciones trigonométricas restantes.

19.  $\tan x = -2, \pi/2 < x < \pi$

20.  $\cot x = \frac{1}{2}, \pi < x < 3\pi/2$

21.  $\csc x = \frac{4}{3}, 0 < x < \pi/2$

22.  $\sec x = -5, \pi/2 < x < \pi$

23. Si  $3 \cos x = \sin x$ , determine todos los valores de  $\tan x$ ,  $\cot x$ ,  $\sec x$  y  $\csc x$ .

24. Si  $\csc x = \sec x$ , determine todos los valores de  $\tan x$ ,  $\cot x$ ,  $\sin x$  y  $\cos x$ .

En los problemas 25 a 32 determine el periodo, las intersecciones con el eje  $x$  y las asíntotas verticales de la función. Trace al menos un ciclo de la gráfica.

25.  $y = \tan \pi x$

26.  $y = \tan \frac{x}{2}$

27.  $y = \cot 2x$

28.  $y = -\cot \frac{\pi x}{3}$

29.  $y = \tan\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$

30.  $y = \frac{1}{4} \cot\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

31.  $y = -1 + \cot \pi x$

32.  $y = \tan\left(x + \frac{5\pi}{6}\right)$

En los problemas 33 a 40 determine el periodo y las asíntotas verticales de la función. Trace al menos un ciclo de la gráfica.

33.  $y = -\sec x$

34.  $y = 2\sec \frac{\pi x}{2}$

35.  $y = 3 \csc \pi x$

36.  $y = -2\csc \frac{x}{3}$

37.  $y = \sec \left( 3x - \frac{\pi}{2} \right)$

38.  $y = \csc (4x + \pi)$

39.  $y = 3 + \csc \left( 2x + \frac{\pi}{2} \right)$

40.  $y = -1 + \sec (x + 2\pi)$

En los problemas 41 y 42, use las gráficas de  $y = \tan x$  y  $y = \sec x$  para determinar los números  $A$  y  $C$  para los cuales la igualdad indicada es cierta.

41.  $\cot x = A \tan (x + C)$

42.  $\csc x = A \sec (x + C)$

### ≡ Para la discusión

43. Ponga la calculadora en modo radián y compare los valores de  $\tan 1.57$  y  $\tan 1.58$ . Explique la diferencia entre esos valores.

44. Use una calculadora en modo radián y compare los valores de  $\cot 3.14$  y  $\cot 3.15$ .

45. ¿Puede ser  $9 \csc x = 1$  para algún número real  $x$ ?

46. ¿Puede ser  $7 + 10 \sec x = 0$  para algún número real  $x$ ?

47. ¿Para cuáles números reales  $x$  se cumple **a)**  $\sec x \leq \csc x$ ? **b)**  $\sec x < \csc x$ ?

48. ¿Para cuáles números reales  $x$  se cumple **a)**  $\sec x \leq \cos x$ ? **b)**  $\sec x < \cos x$ ?

49. Describa, y después trace, las gráficas de  $y = |\sec x|$  y  $y = |\csc x|$ .

50. Use la definición 5.2.1 para comprobar el teorema 9.3.1, es decir, que  $f(x) = \tan x$  y  $g(x) = \cot x$  son funciones impares.

## 9.4 Identidades especiales

■ **Introducción** En esta sección examinaremos identidades trigonométricas. Una **identidad trigonométrica** es una ecuación o fórmula donde intervienen funciones trigonométricas, que es válida para todos los ángulos o números reales para los cuales están definidos ambos lados de la igualdad. Hay *numerosas* identidades trigonométricas, pero sólo se demostrarán las que tienen una importancia especial en los cursos de matemáticas y de ciencias.

Las fórmulas que se deducen en la descripción que sigue se aplican a un número real  $x$  y también a un ángulo  $x$  expresado en grados o en radianes.

■ **Identidades pitagóricas** En la sección 8.2 y 8.4 vimos que el seno y coseno están relacionados por la identidad básica  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ . En la sección 8.4 vimos que al dividir a su vez estas identidades entre  $\cos^2 x$  y luego entre  $\sin^2 x$ , obtenemos dos identidades más, una relacionada con  $\tan^2 x$  al  $\sec^2 x$  y la otra con  $\cot^2 x$  al  $\csc^2 x$ . Estas **identidades pitagóricas** son tan fundamentales para la trigonometría que las trataremos otra vez para referencias futuras.

### Teorema 9.4.1 Identidades pitagóricas

Si  $x$  es un número real para el que están definidas las funciones,

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \quad (1)$$

$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x, \quad (2)$$

$$1 + \cot^2 x = \csc^2 x. \quad (3)$$

■ **Sustituciones trigonométricas** En cálculo, con frecuencia es útil usar sustitución trigonométrica para cambiar la forma de ciertas expresiones algebraicas donde intervienen radi-

cales. En general, eso se hace aplicando las identidades pitagóricas. El ejemplo que sigue ilustra la técnica.

### EJEMPLO 1 Replanteo de un radical

Transformar  $\sqrt{a^2 - x^2}$  en una expresión trigonométrica que no tenga radicales, mediante la sustitución  $x = a \operatorname{sen} \theta$ ,  $a > 0$  y  $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ .

**Solución** Si  $x = a \operatorname{sen} \theta$ , entonces

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2 - x^2} &= \sqrt{a^2 - (a \operatorname{sen} \theta)^2} \\ &= \sqrt{a^2 - a^2 \operatorname{sen}^2 \theta} \\ &= \sqrt{a^2(1 - \operatorname{sen}^2 \theta)} \quad \leftarrow \text{ahora use del teorema 9.4.1} \\ &= \sqrt{a^2 \cos^2 \theta}.\end{aligned}$$

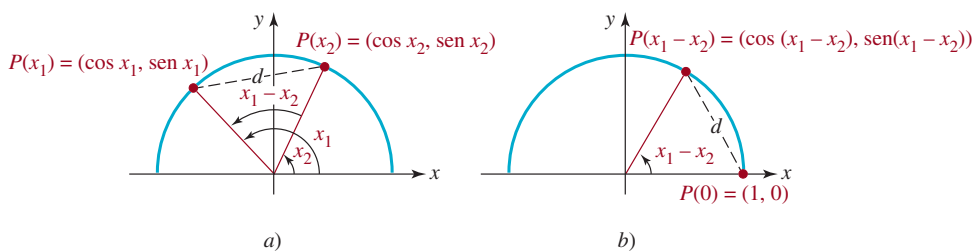
Ya que  $a > 0$  y  $\cos \theta \geq 0$  para  $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ , el radical original es igual que

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 \cos^2 \theta} = a \cos \theta. \quad \equiv$$

■ **Fórmulas de suma y diferencia** Las **fórmulas de suma y diferencia** de las funciones coseno y seno son identidades que reducen  $\cos(x_1 + x_2)$ ,  $\cos(x_1 - x_2)$ ,  $\operatorname{sen}(x_1 + x_2)$  y  $\operatorname{sen}(x_1 - x_2)$  a expresiones que contienen  $\cos x_1$ ,  $\cos x_2$ ,  $\operatorname{sen} x_1$  y  $\operatorname{sen} x_2$ . Aquí deduciremos primero la fórmula de  $\cos(x_1 - x_2)$ , y después usaremos el resultado para obtener las demás.

Por comodidad, supongamos que  $x_1$  y  $x_2$  representan ángulos expresados en radianes. Como se ve en la **FIGURA 9.4.1a**, sea  $d$  la distancia entre  $P(x_1)$  y  $P(x_2)$ . Si se coloca al ángulo  $x_1 - x_2$  en posición normal, como se ve en la figura 9.4.1b), entonces  $d$  también es la distancia entre  $P(x_1 - x_2)$  y  $P(0)$ . Al igualar los cuadrados de esas distancias se obtienen

$$\begin{aligned}(\cos x_1 - \cos x_2)^2 + (\operatorname{sen} x_1 - \operatorname{sen} x_2)^2 &= (\cos(x_1 - x_2) - 1)^2 + \operatorname{sen}^2(x_1 - x_2) \\ \text{o sea } \cos^2 x_1 - 2 \cos x_1 \cos x_2 + \cos^2 x_2 + \operatorname{sen}^2 x_1 - 2 \operatorname{sen} x_1 \operatorname{sen} x_2 + \operatorname{sen}^2 x_2 \\ &= \cos^2(x_1 - x_2) - 2 \cos(x_1 - x_2) + 1 + \operatorname{sen}^2(x_1 - x_2).\end{aligned}$$



**FIGURA 9.4.1** La diferencia de dos ángulos

En vista de la identidad (1),

$$\cos^2 x_1 + \operatorname{sen}^2 x_1 = 1, \quad \cos^2 x_2 + \operatorname{sen}^2 x_2 = 1, \quad \cos^2(x_1 - x_2) + \operatorname{sen}^2(x_1 - x_2) = 1,$$

por lo que la ecuación anterior se simplifica a

$$\cos(x_1 - x_2) = \cos x_1 \cos x_2 + \operatorname{sen} x_1 \operatorname{sen} x_2.$$

Este último resultado se puede poner en acción de inmediato, para determinar el coseno de la suma de dos ángulos. Como  $x_1 + x_2$  se pueden expresar como la diferencia  $x_1 - (-x_2)$ ,

$$\begin{aligned}\cos(x_1 + x_2) &= \cos(x_1 - (-x_2)) \\ &= \cos x_1 \cos(-x_2) + \operatorname{sen} x_1 \operatorname{sen}(-x_2).\end{aligned}$$

De acuerdo con las identidades par-impar,  $\cos(-x_2) = \cos x_2$ , y  $\operatorname{sen}(-x_2) = -\operatorname{sen} x_2$ ; entonces, el último renglón es lo mismo que

$$\cos(x_1 + x_2) = \cos x_1 \cos x_2 - \operatorname{sen} x_1 \operatorname{sen} x_2.$$

Los dos resultados que acabamos de obtener se resumen a continuación.

#### Teorema 9.4.2 Fórmulas de suma y diferencia del coseno

Para todos los números reales  $x_1$  y  $x_2$ ,

$$\cos(x_1 + x_2) = \cos x_1 \cos x_2 - \operatorname{sen} x_1 \operatorname{sen} x_2, \quad (4)$$

$$\cos(x_1 - x_2) = \cos x_1 \cos x_2 + \operatorname{sen} x_1 \operatorname{sen} x_2. \quad (5)$$

#### EJEMPLO 2 Coseno de una suma

Evaluar  $\cos(7\pi/12)$ .

**Solución** No hay forma de evaluar  $\cos(7\pi/12)$  directamente. Sin embargo, obsérvese que

$$\frac{7\pi}{12} \text{ radianes} = 105^\circ = 60^\circ + 45^\circ = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}.$$

Como  $7\pi/12$  radianes es un ángulo del segundo cuadrante, el valor de  $\cos(7\pi/12)$  es negativo. Al seguir, la fórmula de la suma (4) da como resultado

$$\begin{aligned}\cos \frac{7\pi}{12} &= \overbrace{\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} - \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \operatorname{sen} \frac{\pi}{4}}^{\text{esto es (4) del teorema 9.4.2}} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} (1 - \sqrt{3}).\end{aligned}$$

Si  $\sqrt{2}\sqrt{3} = \sqrt{6}$ , este resultado también se puede escribir como  $\cos(7\pi/12) = (\sqrt{2} - \sqrt{6})/4$ . Como  $\sqrt{6} > \sqrt{2}$ , se ve que  $\cos(7\pi/12) < 0$ , como era de esperarse. ≡

Para obtener las identidades correspondientes de suma o diferencia de la función seno, usaremos dos identidades:

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen} x \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos x. \quad (6)$$

Estas identidades fueron descubiertas en la sección 8.2, al desplazar las gráficas de seno y coseno. Sin embargo, los dos resultados en (6) se pueden demostrar ahora, usando (5):

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos x \cos \frac{\pi}{2} + \sin x \sin \frac{\pi}{2} = \cos x \cdot 0 + \sin x \cdot 1 = \sin x$$

◀ Con esto se demuestra la primera ecuación en (6).

$$\begin{aligned} \cos x &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) \\ &= \cos \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin \frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\ &= 0 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 1 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\ &= -\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

◀ Con esto se demuestra la segunda ecuación en (6).

Ahora bien, de acuerdo con la primera ecuación de (6), el seno de la suma  $x_1 + x_2$  se puede escribir en la forma

$$\begin{aligned} \sin(x_1 + x_2) &= \cos\left((x_1 + x_2) - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \cos\left(x_1 + \left(x_2 - \frac{\pi}{2}\right)\right) \\ &= \cos x_1 \cos\left(x_2 - \frac{\pi}{2}\right) - \sin x_1 \sin\left(x_2 - \frac{\pi}{2}\right) \quad \leftarrow \text{por (4)} \\ &= \cos x_1 \sin x_2 - \sin x_1 (-\cos x_2). \quad \leftarrow \text{por (6)} \end{aligned}$$

Este último renglón se escribe, por tradición, en la siguiente forma:

$$\sin(x_1 + x_2) = \sin x_1 \cos x_2 + \cos x_1 \sin x_2.$$

Para obtener la diferencia  $x_1 - x_2$ , de nuevo aplicaremos  $\cos(-x_2) = \cos x_2$  y  $\sin(-x_2) = -\sin x_2$ :

$$\begin{aligned} \sin(x_1 - x_2) &= \sin(x_1 + (-x_2)) = \sin x_1 \cos(-x_2) + \cos x_1 \sin(-x_2) \\ &= \sin x_1 \cos x_2 - \cos x_1 \sin x_2. \end{aligned}$$

#### Teorema 9.4.3 Fórmulas de suma y diferencia del seno

Para todos los números reales  $x_1$  y  $x_2$ ,

$$\cos(x_1 + x_2) = \cos x_1 \cos x_2 - \sin x_1 \sin x_2 \quad (7)$$

$$\cos(x_1 - x_2) = \cos x_1 \cos x_2 + \sin x_1 \sin x_2 \quad (8)$$

#### EJEMPLO 3 Seno de una suma

Evaluar  $\sin(7\pi/12)$ .

**Solución** Procederemos como en el ejemplo 2, pero usaremos la fórmula (7) de la suma:

$$\begin{aligned} \sin \frac{7\pi}{12} &= \overbrace{\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right)}^{\text{esto es (7) del teorema 9.4.3}} = \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} (1 + \sqrt{3}). \end{aligned}$$

Como en el ejemplo 2, el resultado se puede expresar como  $\sin(7\pi/12) = (\sqrt{2} + \sqrt{6})/4$ . ≡

Como ya se conoce el valor de  $\cos(7\pi/12)$  por el ejemplo 2, también se puede calcular el valor de  $\sin(7\pi/12)$  aplicando la identidad pitagórica (1):

$$\sin^2 \frac{7\pi}{12} + \cos^2 \frac{7\pi}{12} = 1.$$

Se despeja  $\sin(7\pi/12)$  y se toma la raíz cuadrada positiva:

$$\begin{aligned} \sin \frac{7\pi}{12} &= \sqrt{1 - \cos^2 \frac{7\pi}{12}} = \sqrt{1 - \left[ \frac{\sqrt{2}}{4}(1 - \sqrt{3}) \right]^2} \\ &= \sqrt{\frac{4 + 2\sqrt{3}}{8}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}. \end{aligned} \quad (9)$$

Aunque el número en (9) no se parece al resultado que se obtuvo en el ejemplo 3, los valores son iguales. Vea el problema 62 en los ejercicios 9.4.

También hay fórmulas de suma y diferencia de la función tangente. Se puede deducir la fórmula de la suma con las fórmulas de suma del seno y el coseno, como sigue:

$$\tan(x_1 + x_2) = \frac{\sin(x_1 + x_2)}{\cos(x_1 + x_2)} = \frac{\sin x_1 \cos x_2 + \cos x_1 \sin x_2}{\cos x_1 \cos x_2 - \sin x_1 \sin x_2}. \quad (10)$$

Ahora dividiremos numerador y denominador entre (10) entre  $\cos x_1 \cos x_2$  (suponiendo que  $x_1$  y  $x_2$  son tales que  $\cos x_1 \cos x_2 \neq 0$ ),

$$\tan(x_1 + x_2) = \frac{\frac{\sin x_1 \cos x_2}{\cos x_1 \cos x_2} + \frac{\cos x_1 \sin x_2}{\cos x_1 \cos x_2}}{\frac{\cos x_1 \cos x_2}{\cos x_1 \cos x_2} - \frac{\sin x_1 \sin x_2}{\cos x_1 \cos x_2}} = \frac{\tan x_1 + \tan x_2}{1 - \tan x_1 \tan x_2}. \quad (11)$$

La deducción de la fórmula de la diferencia de  $\tan(x_1 - x_2)$  se hace en forma parecida. Los dos resultados se resumen a continuación.

#### Teorema 9.4.4 Fórmulas de suma y diferencia de la tangente

Para números reales  $x_1$  y  $x_2$  para los cuales están definidas las funciones,

$$\tan(x_1 + x_2) = \frac{\tan x_1 + \tan x_2}{1 - \tan x_1 \tan x_2}, \quad (12)$$

$$\tan(x_1 - x_2) = \frac{\tan x_1 - \tan x_2}{1 + \tan x_1 \tan x_2}. \quad (13)$$

#### EJEMPLO 4 Tangente de una suma

Evaluar  $\tan(\pi/12)$ .

**Solución** Si consideramos que  $\pi/12$  es un ángulo en radianes, entonces

$$\frac{\pi}{12} \text{ radianes} = 15^\circ = 45^\circ - 30^\circ = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \text{ radianes.}$$

En consecuencia de la fórmula (13):

$$\begin{aligned}
 \tan \frac{\pi}{12} &= \tan \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\tan \frac{\pi}{4} - \tan \frac{\pi}{6}}{1 + \tan \frac{\pi}{4} \tan \frac{\pi}{6}} \quad \text{esto es (13) del teorema 9.4.4} \\
 &= \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} \quad \leftarrow \text{ésta es la respuesta pero se puede simplificar la expresión} \\
 &= \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} \cdot \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} - 1} \quad \leftarrow \text{se racionaliza el denominador} \\
 &= \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{2} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = \frac{2(2 - \sqrt{3})}{2} = 2 - \sqrt{3}. \quad \equiv
 \end{aligned}$$

El lector debe resolver este ejemplo usando  $\pi/12 = \pi/3 - \pi/4$  para ver que el resultado es el mismo.

Hablando con propiedad, en realidad no necesitamos las identidades de  $\tan(x_1 \pm x_2)$ , porque siempre se pueden determinar  $\sin(x_1 \pm x_2)$  y  $\cos(x_1 \pm x_2)$  aplicando las fórmulas (4) a (8) y a continuación siguiendo como en (10), esto es, formar el cociente de  $\sin(x_1 \pm x_2)/\cos(x_1 \pm x_2)$ .

■ **Fórmulas de ángulo doble** Se pueden deducir muchas y útiles fórmulas trigonométricas a partir de las fórmulas de suma y diferencia. Las **fórmulas de ángulo doble** expresan el coseno y el seno de  $2x$  en función del coseno y el seno de  $x$ .

Si se igualan  $x_1 = x_2 = x$  en (4), y se usa  $\cos(x + x) = \cos 2x$ , entonces

$$\cos 2x = \cos x \cos x - \sin x \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x.$$

De igual forma, igualando  $x_1 = x_2 = x$  en (7), y usando  $\sin(x + x) = \sin 2x$ ,

$$\begin{aligned}
 \text{estos dos términos son iguales} \\
 \downarrow \qquad \qquad \downarrow \\
 \sin 2x = \sin x \cos x + \cos x \sin x = 2 \sin x \cos x.
 \end{aligned}$$

Resumiremos estos dos últimos resultados.

**Teorema 9.4.5** Fórmulas del coseno y seno de ángulo doble

Para todo número real  $x$ ,

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x, \quad (14)$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x. \quad (15)$$

**EJEMPLO 5** Uso de las fórmulas de ángulo doble

Si  $\sin x = -\frac{1}{4}$  y  $\pi < x < 3\pi/2$ , determinar los valores exactos de  $\cos 2x$  y  $\sin 2x$ .

**Solución** Primero se calcula  $\cos x$  aplicando  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ . Como  $\pi < x < 3\pi/2$ ,  $\cos x < 0$  y entonces se escoge la raíz cuadrada negativa:

$$\cos x = -\sqrt{1 - \sin^2 x} = -\sqrt{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^2} = -\frac{\sqrt{15}}{4}.$$

De la fórmula (14), de ángulo doble,

$$\begin{aligned}\cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ &= \left(-\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^2 - \left(-\frac{1}{4}\right)^2 \\ &= \frac{15}{16} - \frac{1}{16} = \frac{14}{16} = \frac{7}{8}.\end{aligned}$$

Por último, de acuerdo con la fórmula (15) de ángulo doble,

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x = 2\left(-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{\sqrt{15}}{4}\right) = \frac{\sqrt{15}}{8}. \quad \equiv$$

La fórmula (14) tiene dos formas alternativas útiles. De acuerdo con (1), se sabe que  $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ . Sustituyendo esta expresión en (14) se obtiene  $\cos 2x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x)$ , es decir

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1. \quad (16)$$

Por otra parte, si en (14) se sustituye  $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ , se llega a

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x. \quad (17)$$

■ **Fórmulas de mitad de ángulo** Las formas alternativas (16) y (17) de la fórmula de ángulo doble (14) son el origen de dos fórmulas de mitad de ángulo. Al despejar  $\cos^2 x$  y  $\sin^2 x$  de (16) y (17) se obtienen, respectivamente,

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) \quad \text{y} \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x). \quad (18)$$

El símbolo  $x$  en (18) se sustituye con  $x/2$ , y usando  $2(x/2) = x$ , se obtienen las fórmulas siguientes.

**Teorema 9.4.6** **Fórmulas de mitad de ángulo del coseno y el seno**

Para todo número real  $x$ ,

$$\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cos x), \quad (19)$$

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos x), \quad (20)$$

**EJEMPLO 6** Aplicación de las fórmulas de mitad de ángulo

Determinar los valores exactos de  $\cos(5\pi/8)$  y  $\sin(5\pi/8)$ .

**Solución** Si hacemos que  $x = 5\pi/4$ , entonces  $x/2 = 5\pi/8$ , y las fórmulas (19) y (20) dan, respectivamente,

$$\begin{aligned}\cos^2\left(\frac{5\pi}{8}\right) &= \frac{1}{2}\left(1 + \cos\frac{5\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\left[1 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right] = \frac{2 - \sqrt{2}}{4} \\ \text{y} \quad \sin^2\left(\frac{5\pi}{8}\right) &= \frac{1}{2}\left(1 - \cos\frac{5\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\left[1 - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right] = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$



Como  $5\pi/8$  radianes es un ángulo del segundo cuadrante,  $\cos(5\pi/8) < 0$  y  $\sin(5\pi/8) > 0$ . En consecuencia se toma la raíz cuadrada negativa como valor del coseno,

$$\cos\left(\frac{5\pi}{8}\right) = -\sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}} = -\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2},$$

y la raíz cuadrada positiva como valor del seno

$$\sin\left(\frac{5\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}. \quad \equiv$$

### Notas del aula

i) ¿Se deben memorizar todas las identidades que se presentaron en esta sección? Pregúntelo a su profesor, pero en opinión de los autores, cuando menos debería memorizar las fórmulas (1) a (8), (14), (15) y las dos fórmulas en (18).

ii) Cuando se inscriba en un curso de cálculo, examine el título de su libro de texto. Si en su título tiene las palabras *Trascendentes tempranas*, casi de inmediato entrarán en acción sus conocimientos de las gráficas y propiedades de las funciones trigonométricas.

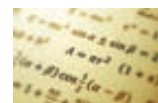
iii) Como se describió en las secciones 2.9 y 3.7, los temas principales de estudio en el cálculo son *derivadas e integrales* de funciones. Las identidades de suma (4) y (7) se usan para determinar las derivadas de  $\sin x$  y  $\cos x$ , vea la sección 4.11. Las identidades tienen utilidad especial en el cálculo integral. Reemplazar un radical por una función trigonométrica, como se ilustra en el ejemplo 1 de esta sección, es una técnica normal para evaluar algunos tipos de integrales. También, para evaluar integrales de  $\cos^2 x$  y  $\sin^2 x$  se usarían las fórmulas de mitad de ángulo, en la forma que se presenta en (18):

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) \quad \text{y} \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x).$$

En algún momento de sus estudios de cálculo integral se le pedirá evaluar integrales de productos como

$$\sin 2x \sin 5x \quad \text{y} \quad \sin 10x \cos 4x.$$

Una forma de hacerlo es usar las fórmulas de suma o diferencia para formar una identidad que convierta esos productos ya sea en una suma de senos o en una suma de cosenos. Vea los problemas 66 a 70 en los ejercicios 7.4.



## 9.4 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-24.

En los problemas 1 a 8 proceda como en el ejemplo 1 y formule la expresión como expresión trigonométrica sin radicales, haciendo la sustitución indicada. Suponga que  $a > 0$ .

1.  $\sqrt{a^2 - x^2}$ ,  $x = a \cos \theta$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$

2.  $\sqrt{a^2 + x^2}$ ,  $x = a \tan \theta$ ,  $-\pi/2 < \theta < \pi/2$

3.  $\sqrt{x^2 - a^2}$ ,  $x = a \sec \theta$ ,  $0 \leq \theta < \pi/2$

4.  $\sqrt{16 - 25x^2}$ ,  $x = \frac{4}{5} \sin \theta$ ,  $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$

5.  $\frac{x}{\sqrt{9 - x^2}}$ ,  $x = 3 \sin \theta$ ,  $-\pi/2 < \theta < \pi/2$

6.  $\frac{\sqrt{x^2 - 3}}{x^2}$ ,  $x = \sqrt{3} \sec \theta$ ,  $0 < \theta < \pi/2$

7.  $\frac{1}{\sqrt{7 + x^2}}$ ,  $x = \sqrt{7} \tan \theta$ ,  $-\pi/2 < \theta < \pi/2$

8.  $\frac{\sqrt{5 - x^2}}{x}$ ,  $x = \sqrt{5} \cos \theta$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$

En los problemas 9 a 30, use una fórmula de suma o diferencia para determinar el valor exacto de la expresión indicada.

9.  $\cos \frac{\pi}{12}$
10.  $\sin \frac{\pi}{12}$
11.  $\sin 75^\circ$
12.  $\cos 75^\circ$
13.  $\sin \frac{7\pi}{12}$
14.  $\cos \frac{11\pi}{12}$
15.  $\tan \frac{5\pi}{12}$
16.  $\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right)$
17.  $\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)$
18.  $\tan \frac{11\pi}{12}$
19.  $\sin \frac{11\pi}{12}$
20.  $\tan \frac{7\pi}{12}$
21.  $\cos 165^\circ$
22.  $\sin 165^\circ$
23.  $\tan 165^\circ$
24.  $\cos 195^\circ$
25.  $\sin 195^\circ$
26.  $\tan 195^\circ$
27.  $\cos 345^\circ$
28.  $\sin 345^\circ$
29.  $\cos \frac{13\pi}{12}$
30.  $\tan \frac{17\pi}{12}$

En los problemas 31 a 34, use una fórmula de ángulo doble para escribir la expresión dada como una sola función trigonométrica del doble del ángulo.

31.  $2 \cos \beta \sin \beta$
32.  $\cos^2 2t - \sin^2 2t$

33.  $1 - 2 \sin^2 \frac{\pi}{5}$
34.  $2 \cos^2 \left(\frac{19}{2}x\right) - 1$

En los problemas 35 a 40, use la información presentada para determinar **a)**  $\cos 2x$ , **b)**  $\sin 2x$  y **c)**  $\tan 2x$ .

35.  $\sin x = \sqrt{2}/3$ ,  $\pi/2 < x < \pi$
36.  $\cos x = \sqrt{3}/5$ ,  $3\pi/2 < x < 2\pi$
37.  $\tan x = \frac{1}{2}$ ,  $\pi < x < 3\pi/2$
38.  $\csc x = -3$ ,  $\pi < x < 3\pi/2$
39.  $\sec x = -\frac{13}{5}$ ,  $\pi/2 < x < \pi$
40.  $\cot x = \frac{4}{3}$ ,  $0 < x < \pi/2$

En los problemas 41 a 48, use la fórmula de mitad de ángulo para determinar el valor exacto de la expresión dada.

41.  $\cos(\pi/12)$
42.  $\sin(\pi/8)$
43.  $\sin(3\pi/8)$
44.  $\tan(\pi/12)$
45.  $\cos 67.5^\circ$
46.  $\sin 15^\circ$
47.  $\csc(13\pi/12)$
48.  $\sec(-3\pi/8)$

En los problemas 49 a 54 use la información indicada para determinar **a)**  $\cos(x/2)$ , **b)**  $\sin(x/2)$  y **c)**  $\tan(x/2)$ .

49.  $\sin t = \frac{12}{13}$ ,  $\pi/2 < t < \pi$
50.  $\cos t = \frac{4}{5}$ ,  $3\pi/2 < t < 2\pi$
51.  $\tan x = 2$ ,  $\pi < x < 3\pi/2$
52.  $\csc x = 9$ ,  $0^\circ < x < \pi/2$
53.  $\sec x = \frac{3}{2}$ ,  $0^\circ < x < 90^\circ$
54.  $\cot x = -\frac{1}{4}$ ,  $90^\circ < x < 180^\circ$
55. Si  $P(x_1)$  y  $P(x_2)$  son puntos del cuadrante II en el lado terminal de los ángulos  $x_1$  y  $x_2$ , respectivamente, y  $\cos x_1 = -\frac{1}{3}$  y  $\sin x_2 = \frac{2}{3}$ , determine **a)**  $\sin(x_1 + x_2)$ , **b)**  $\cos(x_1 + x_2)$ , **c)**  $\sin(x_1 - x_2)$  y **d)**  $\cos(x_1 - x_2)$ .
56. Si  $x_1$  es un ángulo del cuadrante II,  $x_2$  es un ángulo del cuadrante III,  $\sin x_1 = \frac{8}{17}$ , y  $\tan x_2 = \frac{3}{4}$ , determine **a)**  $\sin(x_1 + x_2)$ , **b)**  $\sin(x_1 - x_2)$ , **c)**  $\cos(x_1 + x_2)$  y **d)**  $\cos(x_1 - x_2)$ .

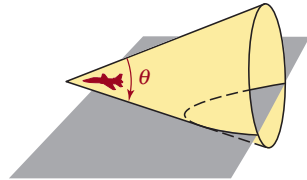
### ≡ Aplicaciones diversas

57. **Número de Mach** La relación de la velocidad de un avión con la velocidad del sonido se llama número de Mach,  $M$ ,

del avión. Si  $M > 1$ , el avión produce ondas sonoras que forman un cono (en movimiento), como se ve en la **FIGURA 9.4.2**. Un estampido sónico se oye en la intersección del cono con el suelo. Si el ángulo del vértice del cono es  $\theta$ , entonces

$$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{1}{M}.$$

Si  $\theta = \pi/6$ , calcule el valor exacto del número de Mach.



**FIGURA 9.4.2** Avión del problema 57

- 58. Ramificación cardiovascular** Un modelo matemático del flujo de la sangre en un vaso sanguíneo grande indica que los valores óptimos de los ángulos  $\theta_1$  y  $\theta_2$ , que representan los ángulos (positivos) de las ramas menores (vasos) con respecto al eje del conducto inicial, se determinan con

$$\cos \theta_1 = \frac{A_0^2 + A_1^2 - A_2^2}{2A_0A_1}$$

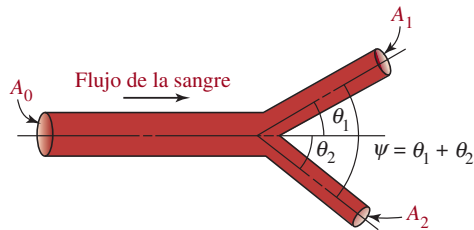
y 
$$\cos \theta_2 = \frac{A_0^2 - A_1^2 + A_2^2}{2A_0A_2},$$

donde  $A_0$  es el área transversal del conducto inicial y  $A_1$  y  $A_2$  son las áreas transversales de las ramas. Véase la **FIGURA 9.4.3**. Sea  $\psi = \theta_1 + \theta_2$  el ángulo de ramificación, como se indica en la figura.

a) Demuestre que

$$\cos \psi = \frac{A_0^2 - A_1^2 - A_2^2}{2A_1A_2}.$$

b) Demuestre que, para los valores óptimos de  $\theta_1$  y  $\theta_2$ , el área transversal de las ramas,  $A_1 + A_2$ , es mayor o igual que la del vaso inicial. Por consiguiente, el flujo de la sangre debe desacelerarse en las ramas.

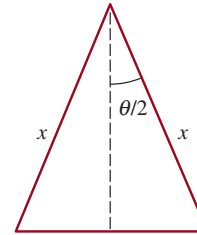


**FIGURA 9.4.3** Ramificación de un vaso sanguíneo grande, del problema 58

- 59. Área de un triángulo** Demuestre que el área de un triángulo isósceles, con lados iguales de longitud  $x$ , es

$$A = \frac{1}{2}x^2 \sin \theta,$$

donde  $\theta$  es el ángulo que forman los dos lados iguales. Véase la **FIGURA 9.4.4**. [Pista: tenga en cuenta a  $\theta/2$ , como se ve en la figura].



**FIGURA 9.4.4** Triángulo isósceles del problema 59

- 60. Alcance de un proyectil** Si un proyectil, como por ejemplo una bala de atletismo, se lanza hacia arriba desde una altura  $h$ , en dirección que hace ángulo  $\phi$  con una velocidad  $v_0$ , el alcance  $R$  hasta donde llega al suelo se determina con

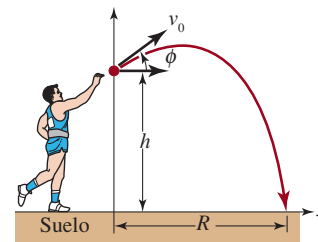
$$R = \frac{v_0^2 \cos \phi}{g} (\sin \phi + \sqrt{\sin^2 \phi + (2gh/v_0^2)}),$$

donde  $g$  es la aceleración de la gravedad. Véase la **FIGURA 9.4.5**. Se puede demostrar que el alcance máximo,  $R_{\text{máx}}$ , se logra si el ángulo  $\phi$  satisface la ecuación

$$\cos 2\phi = \frac{gh}{v_0^2 + gh}.$$

Demuestre que 
$$R_{\text{máx}} = \frac{v_0 \sqrt{v_0^2 + 2gh}}{g}$$

usando las ecuaciones para  $R$  y  $\cos 2\phi$ , y las fórmulas de medio ángulo de seno y coseno, con  $t = 2\phi$ .



**FIGURA 9.4.5** Proyectil del problema 60

### ≡ Para la discusión

61. Explique por qué es de esperar que su calculadora muestre un mensaje de error cuando se trata de evaluar

$$\frac{\tan 35^\circ + \tan 55^\circ}{1 - \tan 35^\circ \tan 55^\circ}?$$

62. En el ejemplo 3 se demostró que  $\sin \frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$ .

Siguiendo el ejemplo, después se demostró que  $\sin \frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2}$ . Demuestre que estos resultados son equivalentes.

63. Explique cómo se podría expresar  $\sin 3\theta$  en función de  $\sin \theta$ . Ejecute sus ideas.
64. En el problema 55, ¿en qué cuadrante están  $P(x_1 + x_2)$  y  $P(x_1 - x_2)$ ?
65. En el problema 56 ¿en qué cuadrante está el lado terminal de  $x_1 + x_2$ ? ¿Y el lado terminal de  $x_1 - x_2$ ?
66. Use las fórmulas de suma o diferencia (4), (5), (7) y (8) para deducir las **fórmulas de producto a suma**:

$$\sin x_1 \sin x_2 = \frac{1}{2}[\cos(x_1 - x_2) - \cos(x_1 + x_2)]$$

$$\cos x_1 \cos x_2 = \frac{1}{2}[\cos(x_1 - x_2) + \cos(x_1 + x_2)]$$

$$\sin x_1 \cos x_2 = \frac{1}{2}[\sin(x_1 + x_2) + \sin(x_1 - x_2)]$$

En los problemas 67 a 70 use una fórmula de producto a suma como las del problema 66 para expresar el producto indicado como una suma de senos o una suma de cosenos.

67.  $\cos 4\theta \cos 3\theta$

68.  $\sin \frac{3t}{2} \cos \frac{t}{2}$

69.  $\sin 2x \sin 5x$

70.  $\sin 10x \sin 4x$

En los problemas 71 y 72 use una de las fórmulas del problema 66 para hallar el problema exacto de la expresión dada.

71.  $\sin 15^\circ \sin 45^\circ$

72.  $\sin 75^\circ \cos 15^\circ$

73. Demuestre la fórmula del doble ángulo para la función tangente:

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

74. Demuestre la fórmula de mitad de ángulo para la función tangente:

$$\tan^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$$

En los problemas 75 y 76, pruebe las fórmulas alternativas de mitad de ángulo para la función tangente. [Pista: en el problema 75, multiplique el numerador y el denominador de  $\frac{\sin(x/2)}{\cos(x/2)}$  por  $2 \sin(x/2)$  y después examine (15) y (20)].

75.  $\tan \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$

76.  $\tan \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$

77. Explique: ¿por qué las fórmulas de los problemas 75 y 76 son más útiles que la fórmula del problema 74?

Recuerde que una función  $f$  es uno a uno si toda  $y$  en su contradominio corresponde exactamente a una  $x$  en su dominio.

## 9.5 Funciones trigonométricas inversas

■ **Introducción** Aunque se pueden calcular los valores de las funciones trigonométricas de números reales o de ángulos, en muchas aplicaciones se debe hacer la inversa: dado el valor de una función trigonométrica, determinar un ángulo o número correspondiente. Eso parece indicar que se deben usar funciones trigonométricas inversas. Antes de definir esas funciones, vamos a recordar de la sección 5.6 algunas de las propiedades de una función uno a uno y su inversa  $f^{-1}$ .

■ **Propiedades de las funciones inversas** Si  $y = f(x)$  es una función uno a uno, hay entonces una función inversa única,  $f^{-1}$ , con las propiedades correspondientes:

## PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES INVERSAS

- El dominio de  $f^{-1}$  = contradominio de  $f$ .
- El contradominio de  $f^{-1}$  = dominio de  $f$ .
- $y = f(x)$  equivale a  $x = f^{-1}(y)$ .
- Las gráficas de  $f$  y  $f^{-1}$  son reflexiones en la recta  $y = x$ .
- $f(f^{-1}(x)) = x$  para toda  $x$  en el dominio de  $f^{-1}$ .
- $f^{-1}(f(x)) = x$  para  $x$  en el dominio de  $f$ .

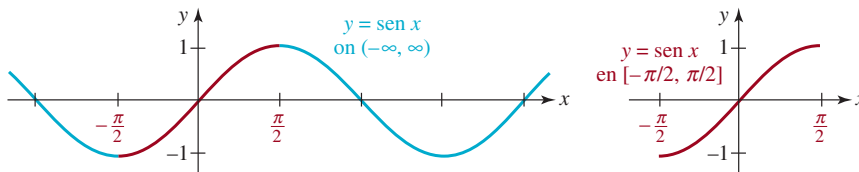
Al revisar las gráficas de las diversas funciones trigonométricas se ve con claridad que *ninguna* de esas funciones es uno a uno. En la sección 5.6 describimos que si una función  $f$  no es uno a uno, se podrá restringir la función a una parte de su dominio donde sí sea uno a uno. Entonces, se puede definir una inversa de  $f$  en ese dominio restringido. En el caso normal, cuando se restringe el dominio, uno se asegura de conservar todo el contradominio de la función original.

◀ Vea el ejemplo 7 en la sección 5.6.

■ **Función arco seno** En la **FIGURA 9.5.1a)** se ve que la función  $y = \text{sen } x$  en el intervalo cerrado  $[-\pi/2, \pi/2]$  asume todos los valores en su contradominio  $[-1, 1]$ . Observe que toda recta horizontal que se trace para cruzar la parte roja de la gráfica lo puede hacer cuando mucho una vez. Así, la función seno en este dominio restringido es uno-a-uno y tiene una inversa. Para representar la inversa de la función que se ve en la figura 9.5.1b) se usan normalmente dos notaciones:

$$\arcsen x \quad \text{o} \quad \text{sen}^{-1} x,$$

y se leen **arco seno de  $x$**  y **seno inverso de  $x$** , respectivamente.

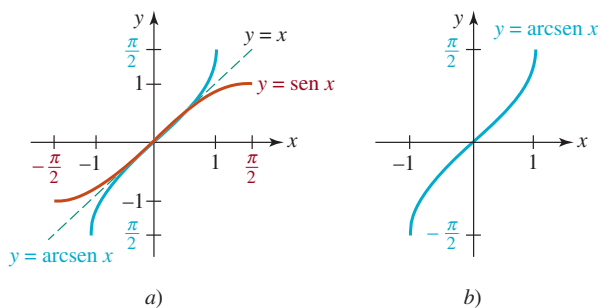


a) No es función uno-a-uno

b) Sí es función uno-a-uno

**FIGURA 9.5.1** Restricción del dominio de  $y = \text{sen } x$  para obtener una función uno-a-uno

En la **FIGURA 9.5.2a)** se ha reflejado una parte de la gráfica de  $y = \text{sen } x$  en el intervalo  $[-\pi/2, \pi/2]$  (la gráfica roja en la figura 9.5.1b) en la recta  $y = x$  para obtener la gráfica de  $y = \arcsen x$  (en azul). Para mayor claridad, hemos reproducido esta gráfica en azul en la figura 9.5.2b). Como indica esta curva, el dominio de la función arco seno es  $[-1, 1]$  y el contradominio es  $[-\pi/2, \pi/2]$ .



a)

b)

**FIGURA 9.5.2** La gráfica de  $y = \arcsen x$  es la curva azul

**Definición 9.5.1 Función arco seno**

La **función arco seno**, o **función seno inverso**, se define por

$$y = \arcsen x \quad \text{si y sólo si} \quad x = \sen y, \quad (1)$$

donde  $-1 \leq x \leq 1$  y  $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$ .

En otras palabras:

*El arco seno del número  $x$  es aquel número  $y$  (o ángulo expresado en radianes) entre  $-\pi/2$  y  $\pi/2$  cuyo seno es  $x$ .*

Precaución:

$$(\sen x)^{-1} = \frac{1}{\sen x} \neq \sen^{-1} x$$

▶ Al usar la notación  $\sen^{-1} x$  es importante tener en cuenta que “-1” no es un exponente; más bien representa una función inversa. La notación  $\arcsen x$  tiene la ventaja sobre la notación  $\sen^{-1} x$  de que no hay “-1” y en consecuencia no da pie a malas interpretaciones; es más, el prefijo “arco” se refiere a un ángulo, *el* ángulo cuyo seno es  $x$ . Pero como  $y = \arcsen x$  y  $y = \sen^{-1} x$  se usan en forma indistinta en cálculo y en sus aplicaciones, continuaremos alternando su uso, para que el lector se sienta cómodo con ambas notaciones.

**EJEMPLO 1 Evaluación de la función seno inverso**

Determinar **a)**  $\arcsen \frac{1}{2}$ , **b)**  $\sen^{-1}(-\frac{1}{2})$  y **c)**  $\sen^{-1}(-1)$ .

**Solución**

- a)** Si se hace que  $y = \arcsen \frac{1}{2}$ , entonces, de acuerdo con (1), se debe encontrar el número  $y$  (o el ángulo en radianes) que satisfaga  $\sen y = \frac{1}{2}$ , y también  $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$ . Ya que  $\sen(\pi/6) = \frac{1}{2}$ , y  $\pi/6$  satisface la desigualdad  $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$ , entonces  $y = \pi/6$ .
- b)** Si se hace que  $y = \sen^{-1}(-\frac{1}{2})$ , entonces  $\sen y = -\frac{1}{2}$ . Como se debe escoger a  $y$  tal que  $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$ , se ve que  $y = -\pi/6$ .
- c)** Si  $y = \sen^{-1}(-1)$ , entonces  $\sen y = -1$  y  $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$ . Por consiguiente,  $y = -\pi/2$ . ≡

Lea este párrafo varias veces.

▶ En los incisos **b)** y **c)** del ejemplo 1 se tuvo cuidado de escoger a  $y$  tal que  $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$ . Por ejemplo, es un error frecuente pensar que como  $\sen(3\pi/2) = -1$ , entonces por necesidad  $\sen^{-1}(-1)$  se puede suponer que es  $3\pi/2$ . Recuerde: si  $y = \sen^{-1}x$ , entonces  $y$  está sujeta a la restricción  $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$ , y  $3\pi/2$  no satisface esta desigualdad.

**EJEMPLO 2 Evaluación de una composición**

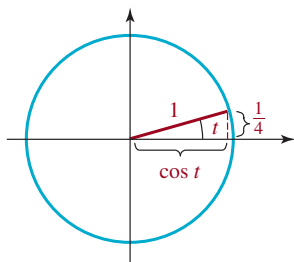
Sin usar calculadora, calcular  $\tan(\sen^{-1}\frac{1}{4})$ .

**Solución** Se debe calcular la tangente del ángulo de  $t$  radianes, cuyo seno sea igual a  $\frac{1}{4}$ , esto es,  $\tan t$ , donde  $t = \sen^{-1}\frac{1}{4}$ . El ángulo  $t$  se ve en la **FIGURA 9.5.3**. Como

$$\tan t = \frac{\sen t}{\cos t} = \frac{1/4}{\cos t},$$

se debe determinar el valor de  $\cos t$ . De la figura 9.5.3 y por la identidad pitagórica  $\sen^2 t + \cos^2 t = 1$ , se ve que

$$\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \cos^2 t = 1 \quad \text{o sea} \quad \cos t = \frac{\sqrt{15}}{4}.$$



**FIGURA 9.5.3** Ángulo  $t = \sen^{-1}\frac{1}{4}$  del ejemplo 2

Por consiguiente,

$$\tan t = \frac{1/4}{\sqrt{15}/4} = \frac{1}{\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{15}}{15},$$

y así  $\tan\left(\sin^{-1}\frac{1}{4}\right) = \tan t = \frac{\sqrt{15}}{15}.$  ≡

■ **Función arco coseno** Si se restringe el dominio de la función coseno al intervalo cerrado  $[0, \pi]$ , la función que resulta es uno-a-uno y tiene inversa. A esta inversa se le representa por

$$\arccos x \quad \text{o} \quad \cos^{-1} x,$$

lo cual nos da la siguiente definición.

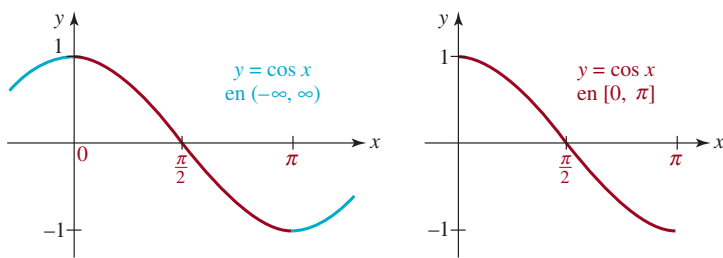
**Definición 9.5.2 Función arco coseno**

La **función arco coseno**, o **función coseno inverso**, se define por

$$y = \arccos x \quad \text{si y sólo si} \quad x = \cos y, \quad (2)$$

donde  $-1 \leq x \leq 1$  y  $0 \leq y \leq \pi$ .

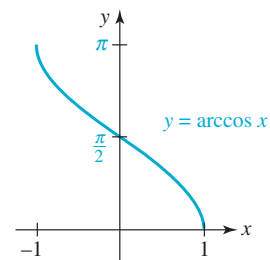
Las gráficas que se ven en la **FIGURA 9.5.4** ilustran cómo se puede restringir la función  $y = \cos x$  al intervalo  $[0, \pi]$  para que sea uno-a-uno. La inversa de la función que muestra la figura 9.5.4b) es  $y = \arccos x$ , o  $y = \arccos x$ .



a) No es función uno a uno

b) Sí es función uno a uno

**FIGURA 9.5.4** Restricción del dominio de  $y = \cos x$  para obtener una función uno a uno



**FIGURA 9.5.5** Gráfica de  $y = \arccos x$

Si se refleja la gráfica de la función uno a uno en la figura 9.5.4b) en la recta  $y = x$ , se obtiene la gráfica de  $y = \arccos x$ , que muestra la **FIGURA 9.5.5**.

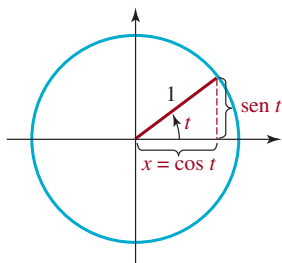
Note que en la figura se ve con claridad que el dominio y el contradominio de  $y = \arccos x$  son  $[-1, 1]$  y  $[0, \pi]$ , respectivamente.

**EJEMPLO 3 Evaluación de la función coseno inverso**

Determinar **a)**  $\arccos(\sqrt{2}/2)$  y **b)**  $\cos^{-1}(-\sqrt{3}/2)$ .

**Solución**

- a) Si se hace que  $y = \arccos(\sqrt{2}/2)$ , entonces  $\cos y = \sqrt{2}/2$ , y  $0 \leq y \leq \pi$ . Entonces,  $y = \pi/4$ .
- b) Si  $y = \cos^{-1}(-\sqrt{3}/2)$ , tenemos  $\cos y = -\sqrt{3}/2$ , y se debe determinar  $y$  tal que  $0 \leq y \leq \pi$ . Por consiguiente,  $y = 5\pi/6$ , porque  $\cos(5\pi/6) = -\sqrt{3}/2$ . ≡



**FIGURA 9.5.6** Ángulo  $t = \cos^{-1}x$  del ejemplo 4

#### EJEMPLO 4 Evaluación de composición de funciones

Escribir  $\text{sen}(\cos^{-1}x)$  como expresión algebraica en  $x$ .

**Solución** En la **FIGURA 9.5.6** se ha trazado un ángulo de  $t$  radianes cuyo coseno es igual a  $x$ . Entonces,  $t = \cos^{-1}x$ , o  $x = \cos t$ , donde  $0 \leq t \leq \pi$ . Ahora, para determinar  $\text{sen}(\cos^{-1}x) = \text{sen } t$ , se usará la identidad  $\text{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$ . Así,

$$\begin{aligned} \text{sen}^2 t + x^2 &= 1 \\ \text{sen}^2 t &= 1 - x^2 \\ \text{sen } t &= \sqrt{1 - x^2} \\ \text{sen}(\cos^{-1}x) &= \sqrt{1 - x^2}. \end{aligned}$$

Se usa la raíz cuadrada no negativa de  $1 - x^2$ , porque el contradominio de  $\cos^{-1}x$  es  $[0, \pi]$ , el seno de un ángulo  $t$  en el primero o segundo cuadrantes es positivo.  $\equiv$

■ **Función arco tangente** Si se restringe el dominio de  $\tan x$  al intervalo abierto  $(-\pi/2, \pi/2)$ , entonces, la función que resulta es uno-a-uno y por consiguiente tiene inversa. Esa inversa se representa por

$$\arctan x \quad \text{o} \quad \tan^{-1}x.$$

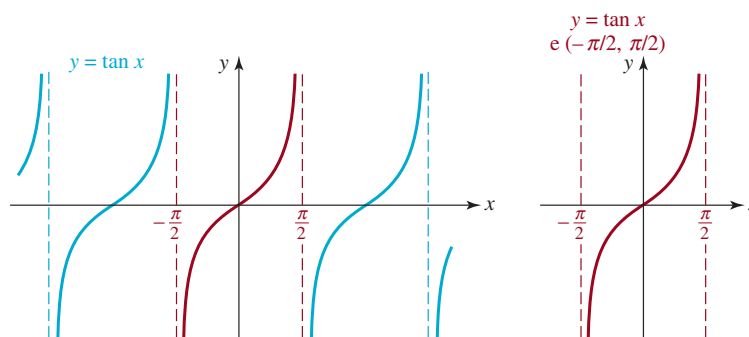
#### Definición 9.5.3 Función arco tangente

La **función arco tangente**, o **tangente inversa**, se define como sigue:

$$y = \arctan x \quad \text{si, y sólo si} \quad x = \tan y, \quad (3)$$

donde  $-\infty < x < \infty$  y  $-\pi/2 < y < \pi/2$ .

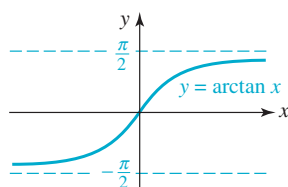
Las gráficas de la **FIGURA 9.5.7** ilustran la forma en que se restringe la función  $y = \tan x$  al intervalo abierto  $(-\pi/2, \pi/2)$ , para que sea función uno a uno.



a) No es función uno a uno

b) Función uno a uno

**FIGURA 9.5.7** Restricción del dominio de  $y = \tan x$  para obtener una función uno a uno



**FIGURA 9.5.8** Gráfica de  $y = \arctan x$

Si se refleja la gráfica de la función uno-a-uno en la figura 9.5.7b) en la recta  $y = x$ , se obtiene la gráfica de  $y = \arctan x$ , que se ve en la **FIGURA 9.5.8**. En esa figura se ve que el dominio y el contradominio de  $y = \arctan x$  son, respectivamente, los intervalos  $(-\infty, \infty)$  y  $(-\pi/2, \pi/2)$ .



**EJEMPLO 5 Evaluación de la tangente inversa**

Determinar  $\tan^{-1}(-1)$ .

**Solución** Si  $\tan^{-1}(-1) = y$ , entonces  $\tan y = -1$ , donde  $-\pi/2 < y < \pi/2$ . Entonces,  $\tan^{-1}(-1) = y = -\pi/4$ . ≡

**EJEMPLO 6 Evaluación de composición de funciones**

Sin usar una calculadora, determinar  $\sin(\arctan(-\frac{5}{3}))$ .

**Solución** Si hacemos que  $t = \arctan(-\frac{5}{3})$ , entonces  $\tan t = -\frac{5}{3}$ . Se puede aplicar la identidad pitagórica  $1 + \tan^2 t = \sec^2 t$  para determinar  $\sec t$ :

$$1 + \left(-\frac{5}{3}\right)^2 = \sec^2 t$$

$$\sec t = \sqrt{\frac{25}{9} + 1} = \sqrt{\frac{34}{9}} = \frac{\sqrt{34}}{3}.$$

En este último renglón se toma la raíz cuadrada positiva, porque  $t = \arctan(-\frac{5}{3})$  está en el intervalo  $(-\pi/2, \pi/2)$  (el contradominio de la función arco tangente) y la secante de un ángulo  $t$  en el primero y cuarto cuadrantes es positiva. También, de  $\sec t = \sqrt{34}/3$  se determina el valor de  $\cos t$ , con la identidad recíproca:

$$\cos t = \frac{1}{\sec t} = \frac{1}{\sqrt{34}/3} = \frac{3}{\sqrt{34}}.$$

Por último, se puede usar la identidad  $\tan t = \sin t / \cos t$  en la forma  $\sin t = \tan t \cos t$ , para calcular  $\sin(\arctan(-\frac{5}{3}))$ . Entonces,

$$\sin t = \tan t \cos t = \left(-\frac{5}{3}\right)\left(\frac{3}{\sqrt{34}}\right) = -\frac{5}{\sqrt{34}}.$$

■ **Propiedades de las funciones inversas** Recordemos, de la sección 5.6, que  $f^{-1}(f(x)) = x$ , y que  $f(f^{-1}(x)) = x$  valen para cualquier función  $f$  y su inversa, bajo las restricciones adecuadas en  $x$ . Entonces, para las funciones trigonométricas inversas se tienen las siguientes propiedades.

**Teorema 9.5.1 Propiedades de las funciones trigonométricas inversas**

i) $\arcsen(\sen x) = \sen^{-1}(\sen x) = x$	si	$-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$
ii) $\sen(\arcsen x) = \sen(\sen^{-1} x) = x$	si	$-1 \leq x \leq 1$
iii) $\arccos(\cos x) = \cos^{-1}(\cos x) = x$	si	$0 \leq x \leq \pi$
iv) $\cos(\arccos x) = \cos(\cos^{-1} x) = x$	si	$-1 \leq x \leq 1$
v) $\arctan(\tan x) = \tan^{-1}(\tan x) = x$	si	$-\pi/2 < x < \pi/2$
vi) $\tan(\arctan x) = \tan(\tan^{-1} x) = x$	si	$-\infty < x < \infty$

**EJEMPLO 7 Aplicación de las propiedades inversas**

Sin usar calculadora, evaluar:

a)  $\sen^{-1}\left(\sen \frac{\pi}{12}\right)$     b)  $\cos\left(\cos^{-1}\frac{1}{3}\right)$     c)  $\tan^{-1}\left(\tan \frac{3\pi}{4}\right)$ .

### Solución

a) De acuerdo con *i*) de las propiedades de las funciones trigonométricas inversas,

$$\operatorname{sen}^{-1}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\pi}{12}.$$

b) De acuerdo con la propiedad *iv*),  $\cos(\cos^{-1}\frac{1}{3}) = \frac{1}{3}$ .

c) En este caso *no se puede* aplicar la propiedad *v*), porque el número  $3\pi/4$  no está en el intervalo  $(-\pi/2, \pi/2)$ . Si primero se evalúa  $\tan(3\pi/4) = -1$ , entonces

Vea el ejemplo 5

$$\tan^{-1}\left(\tan\frac{3\pi}{4}\right) = \tan^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{4}. \quad \equiv$$

El siguiente sección se muestra cómo se usan las funciones trigonométricas inversas para resolver ecuaciones trigonométricas.

■ **Nota final: las demás funciones trigonométricas inversas** Las funciones  $\cot x$ ,  $\sec x$  y  $\csc x$  también tienen inversas, cuando se restringe su dominio en forma adecuada. Véanse los problemas 49 a 51 en los ejercicios 9.5. Como esas funciones no se usan con tanta frecuencia como  $\arctan$ ,  $\arccos$  y  $\arcsen$ , la mayor parte de las calculadoras científicas no tienen teclas para ellas. Sin embargo, cualquier calculadora que determine  $\arcsen$ ,  $\arccos$  y  $\arctan$  se puede usar para obtener valores de **arcsc**, **arcsec** y **arccot**. A diferencia de que  $\sec x = 1/\cos x$ , se ve que  $\sec^{-1}x \neq 1/\cos^{-1}x$ ; más bien  $\sec^{-1}x = \cos^{-1}(1/x)$  para  $|x| \geq 1$ . Hay relaciones similares para  $\csc^{-1}x$  y  $\cot^{-1}x$ . Véanse los problemas 56 a 58 de los ejercicios 9.5.

## 9.5 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-24.

En los problemas 1 a 14 determine el valor solicitado sin usar una calculadora.

- $\operatorname{sen}^{-1}0$
- $\tan^{-1}\sqrt{3}$
- $\arccos(-1)$
- $\operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\arccos\frac{1}{2}$
- $\arctan(-\sqrt{3})$
- $\operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
- $\cos^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\tan^{-1}1$
- $\operatorname{sen}^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2}$

- $\arctan\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$
- $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$
- $\operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
- $\arctan 0$

En los problemas 15 a 32, determine el valor indicado sin usar una calculadora.

- $\operatorname{sen}(\cos^{-1}\frac{3}{5})$
- $\cos(\operatorname{sen}^{-1}\frac{1}{3})$
- $\tan(\arccos(-\frac{2}{3}))$
- $\operatorname{sen}(\arctan\frac{1}{4})$
- $\cos(\arctan(-2))$
- $\tan(\operatorname{sen}^{-1}(-\frac{1}{6}))$

21.  $\csc(\sin^{-1}\frac{3}{5})$
22.  $\sec(\tan^{-1}4)$
23.  $\sin(\sin^{-1}\frac{1}{5})$
24.  $\cos(\cos^{-1}(-\frac{4}{5}))$
25.  $\tan(\tan^{-1}1.2)$
26.  $\sin(\arcsen 0.75)$
27.  $\arcsen\left(\sin\frac{\pi}{16}\right)$
28.  $\arccos\left(\cos\frac{2\pi}{3}\right)$
29.  $\tan^{-1}(\tan \pi)$
30.  $\sin^{-1}\left(\sin\frac{5\pi}{6}\right)$
31.  $\cos^{-1}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$
32.  $\arctan\left(\tan\frac{\pi}{7}\right)$

En los problemas 33 a 40, escriba la expresión como una expresión algebraica en  $x$ .

33.  $\sin(\tan^{-1}x)$
34.  $\cos(\tan^{-1}x)$
35.  $\tan(\arcsen x)$
36.  $\sec(\arccos x)$
37.  $\cot(\sin^{-1}x)$
38.  $\cos(\sin^{-1}x)$
39.  $\csc(\arctan x)$
40.  $\tan(\arccos x)$

En los problemas 41 a 48 trace la gráfica de la función.

41.  $y = \arctan|x|$
42.  $y = \frac{\pi}{2} - \arctan x$
43.  $y = |\arcsen x|$
44.  $y = \sin^{-1}(x + 1)$
45.  $y = 2 \cos^{-1}x$
46.  $y = \cos^{-1}2x$
47.  $y = \arccos(x - 1)$
48.  $y = \cos(\arcsen x)$

49. Se puede definir a la función **arco cotangente** con  $y = \operatorname{arccot} x$  (o  $y = \cot^{-1}x$ ) si y sólo si,  $x = \cot y$ , donde  $0 < y < \pi$ . Grafique  $y = \operatorname{arccot} x$  e indique el dominio y el contradominio de esta función.
50. Se puede definir la función **arco cosecante** con  $y = \operatorname{arccsc} x$  (o  $y = \csc^{-1}x$ ) si y sólo si,  $x = \csc y$ , donde  $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$  y  $y \neq 0$ . Grafique  $y = \operatorname{arccsc} x$  e indique el dominio y el contradominio de esta función.
51. Una definición de la función **arco secante** es  $y = \operatorname{arcsec} x$  (o  $y = \sec^{-1}x$ ) si y sólo si,  $x = \sec y$ , donde  $0 \leq y \leq \pi$  y  $y \neq \pi/2$ . (Vea una definición alternativa en el problema 52.) Grafique  $y = \operatorname{arcsec} x$  e indique el dominio y el contradominio de esta función.
52. Una definición alternativa de la función arco secante puede obtenerse restringiendo el dominio de la función secante a  $[0, \pi/2) \cup [\pi, 3\pi/2)$ . Con esta restricción, defina la función arco secante. Grafique  $y = \operatorname{arcsec} x$  e indique el dominio y el contradominio de esta función.
53. Use la definición de la función arco cotangente del problema 49 e indique para cuáles valores de  $x$  es cierto que **a**)  $\cot(\operatorname{arccot} x) = x$  y **b**)  $\operatorname{arccot}(\cot x) = x$ .
54. Use la definición de la función arco cosecante del problema 50 e indique para cuáles valores de  $x$  se cumple que **a**)  $\csc(\operatorname{arccsc} x) = x$  y **b**)  $\operatorname{arccsc}(\csc x) = x$ .
55. Use la definición de la función arco secante del problema 51 e indique para cuáles valores de  $x$  se cumple que **a**)  $\sec(\operatorname{arcsec} x) = x$  y **b**)  $\operatorname{arcsec}(\sec x) = x$ .
56. Verifique que  $\operatorname{arccot} x = \pi/2 - \arctan x$  para todos los números reales  $x$ .
57. Verifique que  $\operatorname{arccsc} x = \arcsen(1/x)$  para  $|x| \geq 1$ .
58. Verifique que  $\operatorname{arcsec} x = \arccos(1/x)$  para  $|x| \geq 1$ .

En los problemas 59 a 64 use los resultados de los problemas 56 a 58 y una calculadora para determinar el valor correspondiente.

59.  $\cot^{-1}0.75$
60.  $\csc^{-1}(-1.3)$
61.  $\operatorname{arccsc}(-1.5)$
62.  $\operatorname{arccot}(-0.3)$
63.  $\operatorname{arcsec}(-1.2)$
64.  $\sec^{-1}2.5$

### ≡ Aplicaciones diversas

65. **Movimiento de un proyectil** El ángulo de salida de una bala, para que llegue a un blanco a una distancia  $R$  (supo-

niendo que el blanco y el arma están a la misma altura) satisfice

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g},$$

donde  $v_0$  es la velocidad inicial y  $g$  es la aceleración de la gravedad. Si el blanco está a 800 pies del arma, y la velocidad inicial es de 200 pies/s, calcule el ángulo de salida. Use  $g = 32$  pies/s<sup>2</sup>. [Pista: hay dos soluciones].

66. **Deportes olímpicos** En el lanzamiento de martillo se puede demostrar que la distancia máxima se alcanza con un ángulo de lanzamiento  $\theta$  (medido desde la horizontal) que satisfaga

$$\cos 2\theta = \frac{gh}{v_0^2 + gh},$$

donde  $h$  es la altura del martillo sobre el suelo, en el lanzamiento,  $v_0$  es la velocidad inicial y  $g$  es la aceleración de la gravedad. Para  $v_0 = 13.7$  m/s y  $h = 2.25$  m, calcule el ángulo óptimo de lanzamiento. Use  $g = 9.81$  m/s<sup>2</sup>.

67. **Diseño de carreteras** En el diseño de las carreteras y los ferrocarriles, las curvas tienen un peralte para producir una fuerza centrípeta que proporcione seguridad. El ángulo  $\theta$  óptimo para un peralte se define con  $\tan \theta = v^2/Rg$ , donde  $v$  es la velocidad del vehículo,  $R$  el radio de la curva y  $g$  la aceleración de la gravedad. Vea la FIGURA 9.5.9. Como indica la fórmula, para determinado radio no hay un ángulo que sea correcto para todas las velocidades. En consecuencia, las curvas tienen peralte para la velocidad promedio del tráfico en ellas. Calcule el ángulo correcto de peralte para una curva de 600 pies de radio, en una carretera secundaria donde las velocidades son 30 mph en promedio. Use  $g = 32$  pies/s<sup>2</sup>. [Pista: use unidades consistentes].

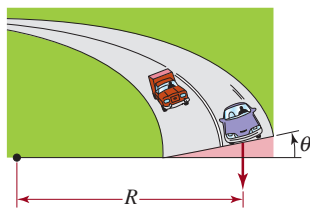


FIGURA 9.5.9 Curva con peralte, del problema 67

68. **Diseño de carreteras, continuación** Si  $\mu$  es el coeficiente de fricción entre el vehículo y la carretera, entonces la velocidad máxima  $v_m$  a la que puede recorrer una curva sin resbalar se calcula con  $v_m^2 = gR \tan(\theta + \tan^{-1} \mu)$ , donde  $\theta$  es el ángulo de peralte de la curva. Calcule  $v_m$  en el camino secundario del problema 67, si  $\mu = 0.26$ .



Cono volcánico

69. **Geología** Visto desde un costado, un cono de cenizas volcánicas se ve como un trapecio isósceles. Véase la FIGURA 9.5.10. Los estudios de conos de ceniza que tienen menos de 50 000 años indican que la altura  $H_{co}$  del cono y el ancho  $W_{cr}$  del cráter se relacionan con el ancho  $W_{co}$  del cono mediante las ecuaciones  $H_{co} = 0.18W_{co}$  y  $W_{cr} = 0.40W_{co}$ . Si  $W_{co} = 1.00$ , con estas ecuaciones determine el ángulo  $\phi$  de la base del trapecioide, en la figura 9.5.10.

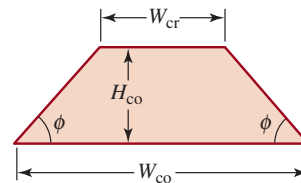


FIGURA 9.5.10 Cono de ceniza volcánica del problema 69

### Para la discusión

70. Use una calculadora puesta en modo radián para evaluar  $\arctan(\tan 1.8)$ ,  $\arccos(\cos 1.8)$  y  $\arcsen(\sin 1.8)$ . Explique los resultados.
71. Use una calculadora puesta en modo radián para evaluar  $\tan^{-1}(\tan(-1))$ ,  $\cos^{-1}(\cos(-1))$  y  $\sin^{-1}(\sin(-1))$ . Explique los resultados.
72. En la sección 9.2 vimos que las gráficas de  $y = \sin x$  y  $y = \cos x$  se relacionan por desplazamiento y reflexión. Justifique la identidad

$$\arcsen x + \arccos x = \frac{\pi}{2},$$

para toda  $x$  en  $[-1, 1]$ , determinando una relación similar entre las gráficas de  $y = \arcsen x$  y  $y = \arccos x$ .

73. Con una calculadora puesta en modo radianes, determine cuál de las siguientes evaluaciones trigonométricas inversas producen un mensaje de error: **a)**  $\sin^{-1}(-2)$ , **b)**  $\cos^{-1}(-2)$ , **c)**  $\tan^{-1}(-2)$ . Explique por qué.
74. Analice lo siguiente: ¿Cualquier función periódica puede ser uno-a-uno?
75. Demuestre que  $\arcsen \frac{3}{5} + \arcsen \frac{5}{13} = \arcsen \frac{56}{65}$ . [Pista: véase (7) de la sección 9.4].

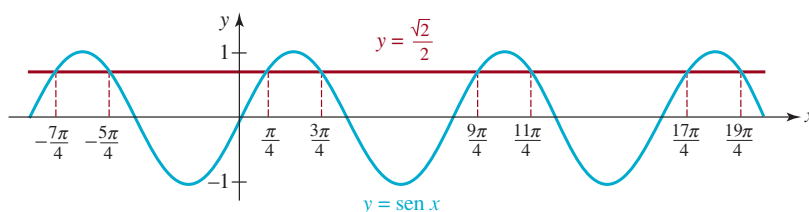
## 9.6 Ecuaciones trigonométricas

■ **Introducción** En la sección 9.4 examinamos identidades, que son ecuaciones que contienen funciones trigonométricas que se satisfacen con todos los valores de la variable para la cual están definidos ambos lados de la igualdad. En esta sección examinaremos **ecuaciones trigonométricas condicionales**, esto es, ecuaciones que sólo son válidas para ciertos valores de la variable. Describiremos técnicas para determinar los valores de la variable (si es que los hay) que satisfagan la ecuación.

Comenzaremos examinando el problema de determinar todos los números reales  $x$  que satisfacen  $\sin x = \sqrt{2}/2$ . Como indica la gráfica de  $y = \sin x$  de la **FIGURA 9.6.1**, existe una cantidad infinita de soluciones de esta ecuación:

$$\dots, -\frac{7\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \frac{17\pi}{4}, \dots \quad (1)$$

$$y \quad \dots, -\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{11\pi}{4}, \frac{19\pi}{4}, \dots \quad (2)$$



**FIGURA 9.6.1** Gráficas de  $y = \sin x$  y  $y = \sqrt{2}/2$

Observe que en cada lista de (1) y (2), cada solución se puede obtener sumando  $2\pi = 8\pi/4$  a la solución anterior. Eso es una consecuencia de la periodicidad de la función seno. Es común que las ecuaciones trigonométricas tengan una cantidad infinita de soluciones, por la periodicidad de las funciones trigonométricas. En general, para obtener soluciones de una ecuación como  $\sin x = \sqrt{2}/2$ , lo más cómodo es usar un círculo unitario y ángulos de referencia, y no una gráfica de la función trigonométrica. Ilustraremos este método en el siguiente ejemplo.

### EJEMPLO 1 Uso del círculo unitario

Determinar todos los números reales  $x$  que satisfagan  $\sin x = \sqrt{2}/2$ .

**Solución** Si  $\sin x = \sqrt{2}/2$ , el ángulo de referencia de  $x$  es  $\pi/4$  radianes. Ya que el valor de  $\sin x$  es positivo, el lado terminal del ángulo  $x$  está en el primero o en el segundo cuadrante. Así, como se ve en la **FIGURA 9.6.2**, las únicas soluciones entre 0 y  $2\pi$  son

$$x = \frac{\pi}{4} \quad \text{o} \quad x = \frac{3\pi}{4}.$$

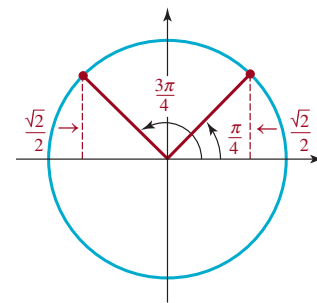
Como la función seno es periódica con periodo  $2\pi$ , todas las soluciones restantes se pueden obtener sumando múltiplos enteros de  $2\pi$  a estas soluciones:

$$x = \frac{\pi}{4} + 2n\pi \quad \text{o} \quad x = \frac{3\pi}{4} + 2n\pi, \quad (3)$$

donde  $n$  es un entero. Los números que ve en (1) y (2) corresponden, respectivamente, a  $n = -1, n = 0, n = 1$  y  $n = 2$  en la primera y la segunda fórmulas en (3). ≡

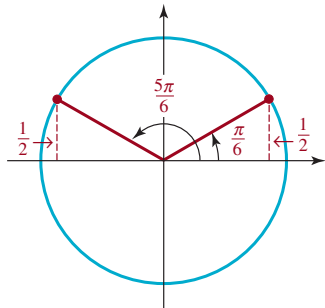
Cuando uno se encuentra con una ecuación más complicada, como

$$4\sin^2 x - 8\sin x + 3 = 0,$$



**FIGURA 9.6.2** Círculo unitario del ejemplo 1

el método básico es despejar una sola función trigonométrica (en este caso sería  $\sin x$ ) con métodos similares a los que se usan para resolver ecuaciones algebraicas.



**FIGURA 9.6.3** Círculo unitario del ejemplo 2

### EJEMPLO 2 Solución de una ecuación trigonométrica mediante factorización

Determinar todas las soluciones de  $4 \sin^2 x - 8 \sin x + 3 = 0$ .

**Solución** Primero, se observa que se trata de una ecuación cuadrática en  $\sin x$ , y que se factoriza como sigue

$$(2 \sin x - 3)(2 \sin x - 1) = 0.$$

Esto implica que

$$\sin x = \frac{3}{2} \quad \text{o} \quad \sin x = \frac{1}{2}.$$

La primera ecuación no tiene solución, porque  $|\sin x| \leq 1$ . Como se ve en la **FIGURA 9.6.3**, los dos ángulos entre  $0$  y  $2\pi$  para los cuales  $\sin x$  es igual a  $\frac{1}{2}$  son

$$x = \frac{\pi}{6} \quad \text{o} \quad x = \frac{5\pi}{6}.$$

Por consiguiente, debido a la periodicidad de la función seno, las soluciones son

$$x = \frac{\pi}{6} + 2n\pi \quad \text{o} \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi,$$

donde  $n$  es un entero. ≡

### EJEMPLO 3 Verificación de soluciones perdidas

Determinar todas las soluciones de

$$\sin x = \cos x. \tag{4}$$

**Solución** Para trabajar con una sola función trigonométrica, se dividen ambos lados de la ecuación entre  $\cos x$ , para obtener

$$\tan x = 1. \tag{5}$$

La ecuación (5) es equivalente a (4) *siempre y cuando*  $\cos x \neq 0$ . Se observa que si  $\cos x = 0$ , entonces, de acuerdo con (4) de la sección 9.2,  $x = (2n + 1)\pi/2 = \pi/2 + n\pi$ , donde  $n$  es un entero. Según la fórmula de suma del seno,

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) = \overset{\text{Vea (7) en la sección 9.4}}{\downarrow} \overset{(-1)^n}{\downarrow} \overset{0}{\downarrow} \sin \frac{\pi}{2} \cos n\pi + \cos \frac{\pi}{2} \sin n\pi = (-1)^n \neq 0,$$

estos valores de  $x$  no satisfacen la ecuación original. Entonces, debemos determinar *todas* las soluciones de (4), resolviendo la ecuación (5).

Ahora bien,  $\tan x = 1$  implica que el ángulo de referencia de  $x$  sea  $\pi/4$  radianes. Ya que  $\tan x = 1 > 0$ , el lado terminal del ángulo de  $x$  radianes puede estar en el primer cuadrante o en el tercero, como se ve en la **FIGURA 9.6.4**. Entonces, las soluciones son

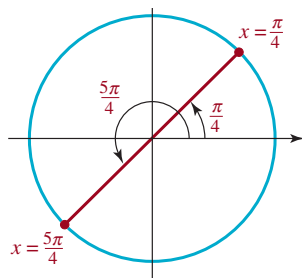
$$x = \frac{\pi}{4} + 2n\pi \quad \text{o} \quad x = \frac{5\pi}{4} + 2n\pi,$$

donde  $n$  es un entero. En la figura 9.6.4 se puede ver que estos dos conjuntos de números se pueden expresar en forma más compacta como sigue:

$$x = \frac{\pi}{4} + n\pi,$$

donde  $n$  es un entero. ≡

$\cos 0 = 1$ ,  $\cos \pi = -1$ ,  $\cos 2\pi = 1$ ,  $\cos 3\pi = -1$ , etc. En general,  $\cos n\pi = (-1)^n$ , donde  $n$  es un entero. ▶



**FIGURA 9.6.4** Círculo unitario del ejemplo 3

Esto es consecuencia de que  $\tan x$  sea periódica con periodo  $\pi$ . ▶

■ **Pérdida de soluciones** Al resolver una ecuación, si se divide entre una expresión que contenga una variable, se pueden perder algunas soluciones de la ecuación original. Por ejemplo, un error común en álgebra, al resolver ecuaciones como  $x^2 = x$  es dividir entre  $x$ , para obtener  $x = 1$ . Pero si se escribe  $x^2 = x$  en la forma  $x^2 - x = 0$ , o  $x(x - 1) = 0$ , se ve que de hecho  $x = 0$  o  $x = 1$ . Para evitar perder alguna solución se deben determinar los valores que hacen que la expresión sea cero, y comprobar si son soluciones de la ecuación original. En el ejemplo 3, nótese que cuando se dividió entre  $\cos x$ , se tuvo cuidado de comprobar que no se perdieran soluciones.

Cuando sea posible, es preferible dividir entre una expresión variable. Como se ilustró con la ecuación algebraica  $x^2 = x$ , esto se puede hacer con frecuencia reuniendo todos los términos distintos de cero en un lado de la ecuación, para entonces factorizar (algo que no pudimos hacer en el ejemplo 3). El ejemplo 4 ilustra esta técnica.

#### EJEMPLO 4 Solución de una ecuación trigonométrica factorizando

Resolver 
$$2 \operatorname{sen} x \cos^2 x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cos x. \quad (6)$$

**Solución** Para evitar dividir entre  $\cos x$ , esta ecuación se escribe como sigue:

$$2 \operatorname{sen} x \cos^2 x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x = 0$$

y se factoriza: 
$$\cos x \left( 2 \operatorname{sen} x \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 0.$$

Entonces, ya sea

$$\cos x = 0 \quad \text{o} \quad 2 \operatorname{sen} x \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.$$

Como el coseno es cero para todos los múltiplos impares de  $\pi/2$ , las soluciones de  $\cos x = 0$  son

$$x = (2n + 1) \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + n\pi,$$

donde  $n$  es un entero.

En la segunda ecuación sustituiremos  $2 \operatorname{sen} x \cos x$  por  $\operatorname{sen} 2x$ , de la fórmula de ángulo doble del seno, y se obtiene una ecuación con una sola función trigonométrica:

$$\operatorname{sen} 2x + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \quad \text{o sea} \quad \operatorname{sen} 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Entonces, el ángulo de referencia de  $2x$  es  $\pi/3$ . Como el seno es negativo, el ángulo  $2x$  debe estar en el tercero o en el cuarto cuadrantes. Como muestra la FIGURA 9.6.5,

$$2x = \frac{4\pi}{3} + 2n\pi \quad \text{o} \quad 2x = \frac{5\pi}{3} + 2n\pi.$$

Se divide entre 2 y resulta

$$x = \frac{2\pi}{3} + n\pi \quad \text{o} \quad x = \frac{5\pi}{6} + n\pi.$$

Por consiguiente, todas las soluciones de (6) son

$$x = \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad x = \frac{2\pi}{3} + n\pi, \quad \text{o} \quad x = \frac{5\pi}{6} + n\pi,$$

donde  $n$  es un entero.

◀ Vea (15) en la sección 9.4.

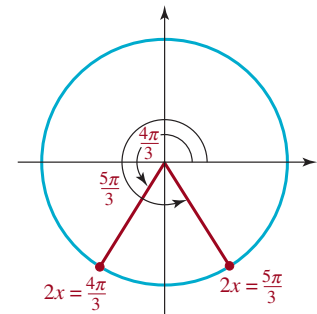


FIGURA 9.6.5 Círculo unitario del ejemplo 4

En el ejemplo 4, si hubiéramos simplificado la ecuación dividiendo entre  $\cos x$  y no hubiéramos comprobado si los valores de  $x$  para los cuales  $\cos x = 0$  satisfacen la ecuación (6), hubiéramos perdido las soluciones  $x = \pi/2 + n\pi$ , donde  $n$  es un entero.

### EJEMPLO 5 Uso de una identidad trigonométrica

Resolver  $3 \cos^2 x - \cos 2x = 1$ .

**Solución** Se observa que la ecuación contiene el coseno de  $x$  y el coseno de  $2x$ . En consecuencia, usaremos la fórmula de ángulo doble del coseno, en la forma

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 \quad \leftarrow \text{Vea (16) de la sección 9.4.}$$

para reemplazar la ecuación por una ecuación equivalente que sólo contenga  $\cos x$ . Se ve que

$$3 \cos^2 x - (2 \cos^2 x - 1) = 1 \quad \text{se transforma en} \quad \cos^2 x = 0.$$

Por lo anterior,  $\cos x = 0$ , y las soluciones son

$$x = (2n + 1) \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + n\pi,$$

donde  $n$  es un entero. ≡

Hasta ahora, en esta sección hemos considerado que la variable de la ecuación trigonométrica representa un número real, o bien un ángulo medido en radianes. Si la variable representa un ángulo expresado en grados, la técnica para resolverla es la misma.

### EJEMPLO 6 Ecuación cuando el ángulo está en grados

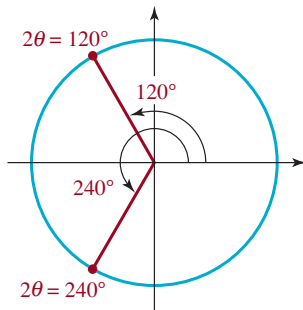
Resolver  $\cos 2\theta = -\frac{1}{2}$ , donde  $\theta$  es un ángulo expresado en grados.

**Solución** Como  $\cos 2\theta = -\frac{1}{2}$ , el ángulo de referencia de  $2\theta$  es  $60^\circ$  y el ángulo  $2\theta$  debe estar en el segundo o tercer cuadrantes. La **FIGURA 9.6.6** muestra que  $2\theta = 120^\circ$ , o  $2\theta = 240^\circ$ . Todo ángulo que sea coterminal con uno de esos ángulos también satisfará  $\cos 2\theta = -\frac{1}{2}$ . Estos ángulos se obtienen sumando cualquier múltiplo entero de  $360^\circ$  a  $120^\circ$  o a  $240^\circ$ .

$$2\theta = 120^\circ + 360^\circ n \quad \text{o} \quad 2\theta = 240^\circ + 360^\circ n,$$

donde  $n$  es un entero. Este renglón se divide entre 2 y quedan

$$\theta = 60^\circ + 180^\circ n \quad \text{o} \quad \theta = 120^\circ + 180^\circ n. \quad \equiv$$



**FIGURA 9.6.6** Círculo unitario del ejemplo 6

■ **Soluciones extrañas** En el ejemplo siguiente se ve que al elevar al cuadrado una ecuación se pueden introducir soluciones extrañas. En otras palabras, la ecuación resultante después de elevar al cuadrado puede *no* ser equivalente a la original.

### EJEMPLO 7 Raíces extrañas

Determinar todas las soluciones de  $1 + \tan \alpha = \sec \alpha$ , donde  $\alpha$  es un ángulo expresado en grados.



**Solución** La ecuación no se factoriza, pero veremos que si se elevan ambos lados al cuadrado se puede aplicar una identidad fundamental para obtener una ecuación que contenga una sola función trigonométrica.

$$\begin{aligned}(1 + \tan \alpha)^2 &= (\sec \alpha)^2 \\ 1 + 2 \tan \alpha + \tan^2 \alpha &= \sec^2 \alpha && \leftarrow \text{Vea (2) de la sección 9.4.} \\ 1 + 2 \tan \alpha + \tan^2 \alpha &= 1 + \tan^2 \alpha \\ 2 \tan \alpha &= 0 \\ \tan \alpha &= 0.\end{aligned}$$

Los valores de  $\alpha$  en  $[0^\circ, 360^\circ)$  para los cuales  $\tan \alpha = 0$  son

$$\alpha = 0^\circ \quad \text{y} \quad \alpha = 180^\circ.$$

Como se elevó al cuadrado cada lado de la ecuación original se pueden haber introducido soluciones adicionales. Por ello es importante comprobar todas las soluciones en la ecuación original. Si se sustituye  $\alpha = 0^\circ$  en  $1 + \tan \alpha = \sec \alpha$ , se obtiene la declaración *cierta*  $1 + 0 = 1$ . Pero después de sustituir  $\alpha = 180^\circ$  se obtiene la declaración *falsa*  $1 + 0 = -1$ . Por lo anterior,  $180^\circ$  es una solución adicional no válida, y  $\alpha = 0^\circ$  es la única solución en el intervalo  $[0^\circ, 360^\circ)$ . Entonces, todas las soluciones de la ecuación son

$$\alpha = 0^\circ + 360^\circ n = 360^\circ n,$$

donde  $n$  es un entero. Para  $n \neq 0$ , son los ángulos que son coterminales con  $0^\circ$ . ≡

Recuerde, de la sección 5.1, que la determinación de las intersecciones con el eje  $x$  de la gráfica de una función  $y = f(x)$  equivale a resolver la ecuación  $f(x) = 0$ . En el siguiente ejemplo se usa lo anterior.

### EJEMPLO 8 Intersecciones de una gráfica

Determine las primeras tres intersecciones con el eje  $x$  de la gráfica de  $f(x) = \sin 2x \cos x$  en el eje de las  $x$  positivas.

**Solución** Se debe resolver  $f(x) = 0$ ; esto es,  $\sin 2x \cos x = 0$ . Se ve que o bien  $\sin 2x = 0$ , o  $\cos x = 0$ .

De  $\sin 2x = 0$  se obtiene  $2x = n\pi$ , donde  $n$  es un entero; es decir,  $x = n\pi/2$ , donde  $n$  es un entero. De  $\cos x = 0$  se obtiene  $x = \pi/2 + n\pi$ , donde  $n$  es un entero. Entonces, para  $n = 2$ ,  $x = n\pi/2$  da  $x = \pi$ , mientras que para  $n = 0$  y  $n = 1$ ,  $x = \pi/2 + n\pi$  da  $x = \pi/2$  y  $x = 3\pi/2$ . Así, las primeras tres intersecciones con el eje  $x$  en el eje de las  $x$  positivas están en  $(\pi/2, 0)$ ,  $(\pi, 0)$  y  $(3\pi/2, 0)$ . ≡

■ **Uso de funciones inversas** Hasta ahora, todas las ecuaciones trigonométricas han tenido soluciones que estaban relacionadas por ángulos de referencia con los ángulos especiales  $0$ ,  $\pi/6$ ,  $\pi/4$ ,  $\pi/3$  o  $\pi/2$ . Si éste no es ese caso, en la siguiente sección veremos cómo usar funciones trigonométricas inversas y una calculadora para determinar las soluciones.

### EJEMPLO 9 Resolución de ecuaciones usando funciones inversas

Encuentre las soluciones de  $4\cos^2 x - 3\cos x - 2 = 0$  en el intervalo  $[0, \pi]$ .

**Solución** Reconocemos que se trata de una ecuación cuadrática en  $\cos x$ . En vista de que el lado izquierdo de la ecuación no se puede factorizar tal como está, aplicamos la fórmula cuadrática para obtener

$$\cos x = \frac{3 \pm \sqrt{41}}{8}.$$

En este momento podemos descartar el valor  $(3 + \sqrt{41})/8 \approx 1.18$ , porque  $\cos x$  no puede ser mayor que 1. A continuación usamos la función coseno inversa (y la ayuda de una calculadora) para resolver la ecuación restante:

$$\cos x = \frac{3 - \sqrt{41}}{8} \quad \text{que implica que} \quad x = \cos^{-1}\left(\frac{3 - \sqrt{41}}{8}\right) \approx 2.01. \quad \equiv$$

Por supuesto, en el ejemplo 9, si hubiéramos intentado calcular  $\cos^{-1}[(3 + \sqrt{41})/8]$  con una calculadora, habríamos recibido un mensaje de error.

## 9.6 Ejercicios Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-24.

En los problemas 1 a 6 determine todas las soluciones de la ecuación trigonométrica, si  $x$  representa un ángulo expresado en radianes.

1.  $\sin x = \sqrt{3}/2$
2.  $\cos x = -\sqrt{2}/2$
3.  $\sec x = \sqrt{2}$
4.  $\tan x = -1$
5.  $\cot x = -\sqrt{3}$
6.  $\cos x = 2$

En los problemas 7 a 12 determine todas las soluciones de la ecuación trigonométrica correspondiente, si  $x$  representa un número real.

7.  $\cos x = -1$
8.  $2 \sin x = -1$
9.  $\tan x = 0$
10.  $\sqrt{3} \sec x = 2$
11.  $-\csc x = 1$
12.  $\sqrt{3} \cot x = 1$

En los problemas 13 a 18, determine todas las soluciones de la ecuación trigonométrica respectiva si  $\theta$  representa un ángulo expresado en grados.

13.  $\csc \theta = 2\sqrt{3}/3$
14.  $2 \sin \theta = \sqrt{2}$
15.  $1 + \cot \theta = 0$
16.  $\sqrt{3} \sin \theta = \cos \theta$
17.  $\sec \theta = -2$
18.  $2 \cos \theta + \sqrt{2} = 0$

En los problemas 19 a 46 determine todas las soluciones de la ecuación trigonométrica respectiva si  $x$  es un número real, y  $\theta$  es un ángulo expresado en grados.

19.  $\cos^2 x - 1 = 0$
20.  $2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1 = 0$
21.  $3 \sec^2 x = \sec x$
22.  $\tan^2 x + (\sqrt{3} - 1) \tan x - \sqrt{3} = 0$
23.  $2 \cos^2 \theta - 3 \cos \theta - 2 = 0$
24.  $2 \sin^2 \theta - \sin \theta - 1 = 0$
25.  $\cot^2 \theta + \cot \theta = 0$
26.  $2 \sin^2 \theta + (2 - \sqrt{3}) \sin \theta - \sqrt{3} = 0$
27.  $\cos 2x = -1$
28.  $\sec 2x = 2$
29.  $2 \sin 3\theta = 1$
30.  $\tan 4\theta = -1$
31.  $\cot(x/2) = 1$
32.  $\csc(\theta/3) = -1$
33.  $\sin 2x + \sin x = 0$
34.  $\cos 2x + \sin^2 x = 1$
35.  $\cos 2\theta = \sin \theta$
36.  $\sin 2\theta + 2 \sin \theta - 2 \cos \theta = 2$
37.  $\sin^4 x - 2 \sin^2 x + 1 = 0$
38.  $\tan^4 \theta - 2 \sec^2 \theta + 3 = 0$
39.  $\sec x \sin^2 x = \tan x$
40.  $\frac{1 + \cos \theta}{\cos \theta} = 2$
41.  $1 + \cot \theta = \csc \theta$
42.  $\sin x + \cos x = 0$

43.  $\sqrt{\frac{1 + 2\operatorname{sen} x}{2}} = 1$   
 44.  $\operatorname{sen} x + \sqrt{\operatorname{sen} x} = 0$   
 45.  $\cos \theta - \sqrt{\cos \theta} = 0$   
 46.  $\cos \theta \sqrt{1 + \tan^2 \theta} = 1$

En los problemas 47 a 54, determine las tres primeras intersecciones con el eje  $x$  de la gráfica de la función, en el eje de las  $x$  positivas.

47.  $f(x) = -5 \operatorname{sen}(3x + \pi)$   
 48.  $f(x) = 2 \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$   
 49.  $f(x) = 2 - \sec \frac{\pi}{2} x$   
 50.  $f(x) = 1 + \cos \pi x$   
 51.  $f(x) = \operatorname{sen} x + \tan x$   
 52.  $f(x) = 1 - 2 \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$   
 53.  $f(x) = \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 2x$   
 54.  $f(x) = \cos x + \cos 3x$  [Pista: escriba  $3x = x + 2x$ ].

En los problemas 55 a 58 haga la gráfica y determine si la ecuación tiene soluciones.

55.  $\tan x = x$ . [Pista: grafique  $y = \tan x$  y  $y = x$  en el mismo conjunto de ejes].  
 56.  $\operatorname{sen} x = x$   
 57.  $\cot x - x = 0$   
 58.  $\cos x + x + 1 = 0$

En los problemas 59 a 64, use una función trigonométrica inversa para obtener las soluciones de la ecuación dada en el intervalo indicado. Redondee las respuestas a dos decimales.

59.  $20 \cos^2 x + \cos x - 1 = 0$ ,  $[0, \pi]$   
 60.  $3 \operatorname{sen}^2 x - 8 \operatorname{sen} x + 4 = 0$ ,  $[-\pi/2, \pi/2]$   
 61.  $\tan^2 x + \tan x - 1 = 0$ ,  $(-\pi/2, \pi/2)$   
 62.  $3 \operatorname{sen} 2x + \cos x = 0$ ,  $[-\pi/2, \pi/2]$   
 63.  $5 \cos^3 x - 3 \cos^2 x - \cos x = 0$ ,  $[0, \pi]$   
 64.  $\tan^4 x - 3 \tan^2 x + 1 = 0$ ,  $(-\pi/2, \pi/2)$

### ≡ Aplicaciones diversas

65. **Triángulo isósceles** En el problema 59 de los ejercicios 9.4, el área del triángulo isósceles cuyo vértice tiene ángulo  $\theta$ , como se ve en la figura 9.4.4, es  $A = \frac{1}{2} x^2 \operatorname{sen} \theta$ . Si la longitud  $x$  es 4 ¿con qué valor de  $\theta$  el área del triángulo será 4?

66. **Movimiento circular** Un objeto describe una trayectoria circular centrada en el origen, con velocidad angular constante. La coordenada  $y$  del objeto, en cualquier momento a los  $t$  segundos, es  $y = 8 \cos(\pi t - \pi/12)$ . ¿En qué momento(s) cruza el objeto al eje  $x$ ?
67. **Número de Mach** Use el problema 57 de los ejercicios 9.4 para determinar el ángulo del vértice del cono, de las ondas sonoras provocadas por un avión que vuele a Mach 2.
68. **Corriente alterna** Un generador eléctrico produce una corriente alterna de 60 ciclos, definida por  $I(t) = 30 \operatorname{sen} 120\pi(t - \frac{7}{36})$ , donde  $I(t)$  es la corriente en amperes a los  $t$  segundos. Calcule el valor positivo más pequeño de  $t$  para el cual la corriente es de 15 amperes.
69. **Circuitos eléctricos** Si se aplica un voltaje definido por  $V = V_0 \operatorname{sen}(\omega t + \alpha)$  a un circuito en serie, se produce una corriente alterna. Si  $V_0 = 110$  volts,  $\omega = 120\pi$  radianes por segundo y  $\alpha = -\pi/6$ , ¿cuándo el voltaje es igual a cero?
70. **Refracción de la luz** Un rayo de luz pasa de un medio (como el aire) a otro (como un cristal). Sean  $\phi$  el ángulo de incidencia y  $\theta$  el ángulo de refracción. Como se ve en la FIGURA 9.6.7, esos ángulos se miden respecto de una línea vertical. De acuerdo con la ley de Snell, hay una  $c$  constante, que depende de los dos medios, tal que  $\frac{\operatorname{sen} \phi}{\operatorname{sen} \theta} = c$ . Suponga que cuando la luz pasa de aire a un cristal,  $c = 1.437$ . Calcule  $\phi$  y  $\theta$  tales que el ángulo de incidencia sea el doble del ángulo de refracción.

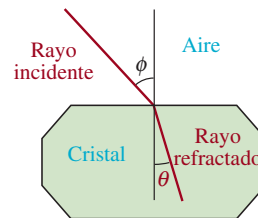


FIGURA 9.6.7 Rayos de luz en el problema 70

71. **Capa de nieve** Con base en datos recolectados entre 1966 y 1980, la superficie de la capa de nieve  $S$  en el hemisferio norte, medida en millones de kilómetros cuadrados, se puede modelar por la función

$$S(w) = 25 + 21 \cos\left(\frac{1}{26}\pi(w - 5)\right),$$

donde  $w$  es la cantidad de semanas después del 1 de enero.

- a) ¿Cuánta capa de nieve indica esta fórmula para mediados de abril? (Redondee  $w$  al entero más cercano.)  
 b) ¿En qué semana la capa nevada será mínima, según la fórmula?  
 c) ¿En qué mes se encuentra esa semana?

## Repaso de conceptos

Debe ser capaz de mencionar el significado de cada uno de los conceptos siguientes.

Funciones circulares:  
 círculo unitario  
 ángulo central  
 ángulo de referencia

Funciones periódicas:  
 periodo de seno  
 periodo de coseno  
 periodo de tangente  
 periodo de cotangente  
 periodo de secante  
 periodo de cosecante

Gráficas de funciones trigonométricas:  
 ciclo  
 amplitud  
 diferencia de fase

Identidades:  
 pitagórica  
 impares y pares

Fórmulas especiales:  
 adición  
 sustracción  
 ángulo doble  
 medio ángulo

Funciones trigonométricas inversas:  
 arcoseno  
 arcocoseno  
 arcotangente

Gráficas de funciones trigonométricas inversas:  
 arcoseno  
 arcocoseno  
 arcotangente

Ecuaciones trigonométricas

## CAPÍTULO 9 Ejercicios de repaso

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-25.

### A. Verdadero/Falso

En los problemas 1 a 20 conteste verdadero o falso.

- Si  $\tan t = \frac{3}{4}$ , entonces  $\sin t = 3$  y  $\cos t = 4$ . \_\_\_\_\_
- En un triángulo rectángulo, si  $\sin \theta = \frac{11}{61}$ , entonces  $\cot \theta = \frac{60}{11}$ . \_\_\_\_\_
- $\sec(-\pi) = \csc\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ . \_\_\_\_\_
- No hay ángulo  $t$  tal que  $\sec t = \frac{1}{2}$ . \_\_\_\_\_
- $\sin(2\pi - t) = -\sin t$ . \_\_\_\_\_
- $1 + \sec^2 \theta = \tan^2 \theta$ . \_\_\_\_\_
- $(-2, 0)$  es una intersección en  $x$  de la gráfica  $y = 3 \sin(\pi x/2)$ .
- $(2\pi/3, -1/\sqrt{3})$  es un punto de la gráfica de  $y = \cot x$ . \_\_\_\_\_
- El contradominio de la función  $y = \csc x$  es  $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ . \_\_\_\_\_
- La gráfica de  $y = \csc x$  no cruza el eje  $y$ . \_\_\_\_\_
- La línea  $x = \pi/2$  es una asíntota vertical de la gráfica de  $y = \tan x$ . \_\_\_\_\_
- Si  $\tan(x + 2\pi) = 0.3$ , entonces  $\tan x = 0.3$ .
- Para la función  $f(x) = -2 \sin x$ , el rango está definido por  $-2 \leq y \leq 2$ .

- $\sin 20x = 2 \sin 10x \cos 10x$ .
- La gráfica de  $y = \sin(2x - \pi/3)$  es la gráfica de  $y = \sin 2x$  desplazada  $\pi/3$  unidades hacia la derecha. \_\_\_\_\_
- Las gráficas  $y = 3 \sin(-2x)$  y  $y = -3 \cos(2x - \pi/2)$  son iguales.
- Como  $\tan(5\pi/4) = 1$ , entonces  $\arctan(1) = 5\pi/4$ . \_\_\_\_\_
- $\tan 8\pi = \tan 9\pi$ . \_\_\_\_\_
- La función  $f(x) = \text{arcoseno } x$  no es periódica. \_\_\_\_\_
- $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = 30^\circ$ . \_\_\_\_\_

### B. Llene los espacios en blanco

En los problemas 1 a 14, llene los espacios en blanco.

- Si  $\sin u = \frac{3}{5}$ ,  $0 < u < \pi/2$  y  $\cos v = 1/\sqrt{5}$ ,  $3\pi/2 < v < 2\pi$ , entonces  $\cos(u + v) =$  \_\_\_\_\_.
- La intersección con el eje  $y$  en la gráfica de la función  $y = 2 \sec(x + \pi)$  es \_\_\_\_\_.
- El periodo de la función  $y = 2 \sin \frac{\pi}{3}x$  es \_\_\_\_\_.
- La primera asíntota vertical de la gráfica de  $y = \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$  a la derecha del eje  $y$  es \_\_\_\_\_.

5. La diferencia de fase en la gráfica de  $y = 5 \cos(3x - 4\pi)$  es \_\_\_\_\_.
6. Si  $\sin t = \frac{1}{6}$ , entonces  $\cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right) =$  \_\_\_\_\_.
7. La amplitud de  $y = -10 \cos\left(\frac{\pi}{3}x\right)$  es \_\_\_\_\_.
8.  $\cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{5\pi}{4}\right) =$  \_\_\_\_\_.
9. El valor exacto de  $\arccos\left(\cos\frac{9\pi}{5}\right) =$  \_\_\_\_\_.
10. El periodo de la función  $y = \tan 4x$  es \_\_\_\_\_.
11. La quinta intersección en  $x$  en el eje  $x$  positivo de la gráfica de la función  $y = \sin \pi x$  es \_\_\_\_\_.
12. Si  $P(t) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$  es un punto en el círculo unitario, entonces  $\sin 2t =$  \_\_\_\_\_.
13. Si  $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{3}$ , donde  $3\pi/2 < x < 2\pi$ , entonces los valores exactos de  $\sin \frac{x}{2} =$  \_\_\_\_\_,  $\cos \frac{x}{2} =$  \_\_\_\_\_,  $\sin 2x =$  \_\_\_\_\_, y  $\cos 2x =$  \_\_\_\_\_.
14. Por los resultados del problema 13, tenemos que  $\tan \frac{x}{2} =$  \_\_\_\_\_ y  $\tan 2x =$  \_\_\_\_\_.

### ≡ C. Ejercicios de repaso

En los problemas 1 a 4, represente gráficamente las funciones dadas. Indique la amplitud, el periodo y la diferencia de fase donde corresponda.

- $y = 5(1 + \sin x)$
- $y = -\frac{4}{3} \cos x$
- $y = 10 \cos\left(-3x + \frac{\pi}{2}\right)$
- $y = -4 \cos\left(\frac{1}{4}x - \pi\right)$

En los problemas 5 a 10 determine todas las  $t$  en el intervalo  $[0, 2\pi]$  que satisfagan la ecuación.

- $\cos t \sin t - \cos t + \sin t - 1 = 0$
- $\cos t - \sin t = 0$
- $4 \sin^2 t - 1 = 0$
- $\sin t = 2 \tan t$

- $\sin t + \cos t = 1$
- $\tan t - 3 \cot t = 2$

En los problemas 11 y 12, obtenga las soluciones de la ecuación dada en el intervalo  $(-\pi/2, \pi/2)$ . Redondee las soluciones a dos decimales.

- $3 \cos 2x + \sin x = 0$
- $\tan^4 x + \tan^2 x - 1 = 0$

En los problemas 13 a 20, calcule el valor indicado sin usar calculadora.

- $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$
- $\arcsen(-1)$
- $\cot(\cos^{-1}\frac{3}{4})$
- $\cos(\arcsen\frac{2}{5})$
- $\sin^{-1}(\sin \pi)$
- $\cos(\arccos 0.42)$
- $\sin(\arccos(\frac{5}{13}))$
- $\arctan(\cos \pi)$

En los problemas 21 y 22 escriba la expresión como expresión algebraica en  $x$ .

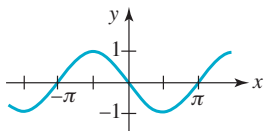
- $\sin(\arccos x)$
- $\sec(\tan^{-1} x)$

En los problemas 23 a 26, dé dos ejemplos de la función trigonométrica indicada tal que cada una tenga las propiedades dadas.

- Función seno con periodo 4 y amplitud 6.
- Función coseno con periodo  $\pi$ , amplitud 4 y diferencia de fase  $\frac{1}{2}$ .
- Función seno con periodo  $\pi/2$ , amplitud 3 y diferencia de fase  $\pi/4$ .
- Función tangente cuya gráfica completa un ciclo en el intervalo  $(-\pi/8, \pi/8)$ .

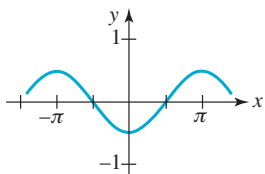
En los problemas 27 a 30, la gráfica correspondiente se puede interpretar como una transformación rígida/no rígida de la gráfica de  $y = \sin x$  o de la gráfica de  $y = \cos x$ . Deduzca la ecuación de la gráfica, usando la función seno. A continuación deduzca la ecuación de la misma gráfica, esta vez mediante la función coseno.

27.



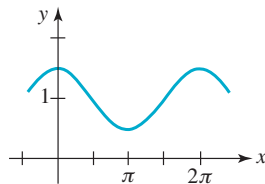
**FIGURA 9.R.1** Gráfica del problema 27

28.



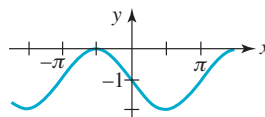
**FIGURA 9.R.2** Gráfica del problema 28

29.



**FIGURA 9.R.3** Gráfica del problema 29

30.



**FIGURA 9.R.4** Gráfica del problema 30