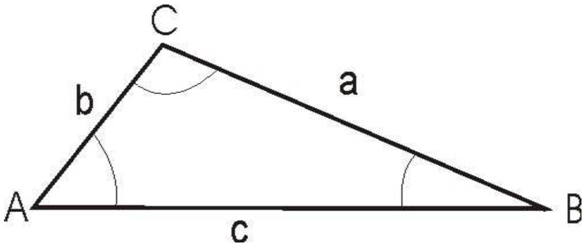
NOCIONES DE TRIGONOMETRÍA

La Trigonometría tiene por objeto la resolución de triángulos, es decir, conocer los valores de sus tres lados y de sus tres ángulos.

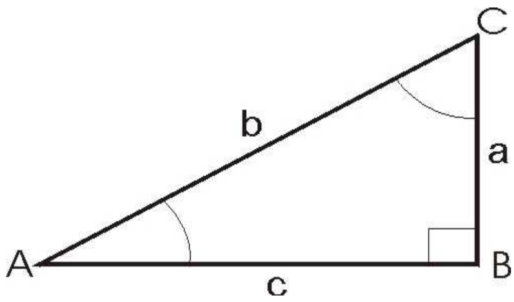
Para resolver un triángulo hemos de conocer tres de sus elementos, uno de los cuales, necesariamente, ha de ser un lado.



Los ángulos de un triángulo se representan con letras mayúsculas (A,B,C) o bien con letras griegas, (α, β, ξ, δ…). Como ves en el dibujo, los lados de un triángulo se nombran teniendo cada uno a su ángulo correspondiente en posición opuesta.

Razones trigonométricas

En el triángulo rectángulo ABC, definiremos:



Seno de un ángulo: es la razón entre el cateto opuesto al ángulo y la hipotenusa.

$$senA = \frac{a}{b} \qquad senC = \frac{c}{b}$$

Coseno de un ángulo: es la razón entre el cateto contiguo y la hipotenusa.

$$\cos A = \frac{c}{b} \qquad \cos C = \frac{a}{b}$$

Tangente de un ángulo: es la razón entre el cateto opuesto y el cateto contiguo:

$$tgA = \frac{a}{c} \qquad tgC = \frac{c}{a}$$

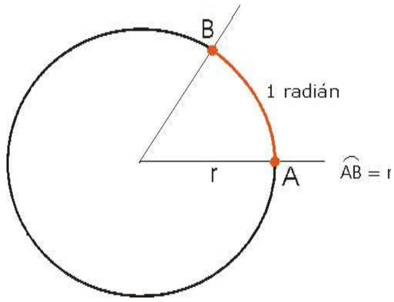
Se definen además otras 3 razones trigonométricas, inversas de las anteriores, que se denominan **cosecante** (inversa del seno), **secante** (inversa del coseno) y **cotangente** (inversa de la tangente).

$$\text{cosecA} = \frac{1}{senA} = \frac{b}{a} \qquad \sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{b}{c} \qquad \text{cotg}\, A = \frac{1}{tgA} = \frac{c}{a}$$

Relaciones entre las razones trigonométricas de un mismo ángulo. Algunas fórmulas importantes:

$$\text{sen}^2 A + \cos^2 A = 1$$

$$\text{tg}A = \frac{\text{sen}A}{\cos A}$$

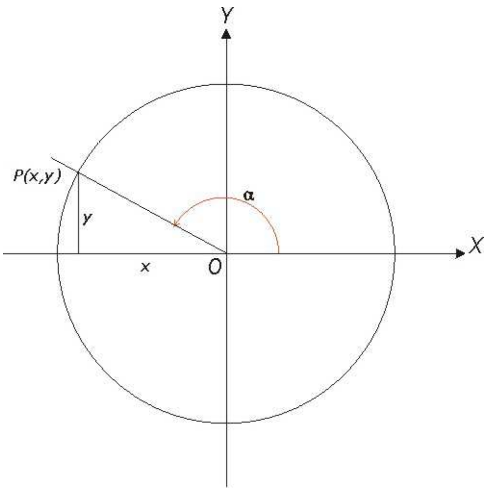


Radián: Es la medida del ángulo central correspondiente a un arco de longitud igual al radio de la circunferencia. Una circunferencia tiene 2π radianes.

Un radián equivale aproximadamente a 57º,29

Razones trigonométricas o circulares

Trazamos una circunferencia de radio R y centro O cualquiera. Consideremos el punto P, de coordenadas (x,y) en la circunferencia. Definimos las razones trigonométricas o circulares del ángulo α de la siguiente forma:

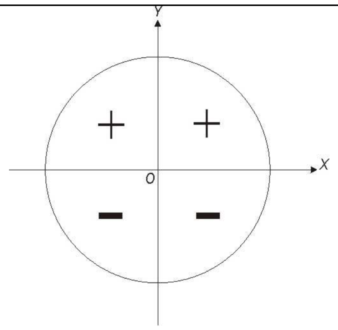
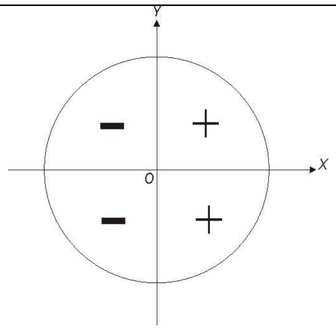
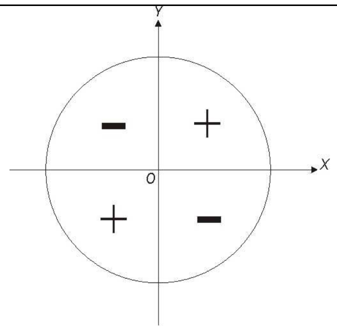


$$\text{sen } \alpha = \frac{ordenada}{radio} = \frac{y}{r}$$

$$\cos \alpha = \frac{abcisa}{radio} = \frac{x}{r}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{ordenada}{abcisa} = \frac{y}{x}$$

Los signos de las razones trigonométricas en los diferentes cuadrantes son:

Seno y cosecante	Coseno y secante	Tangente y cotangente
		

Razones trigonométricas de los ángulos 30º, 45º y 60º

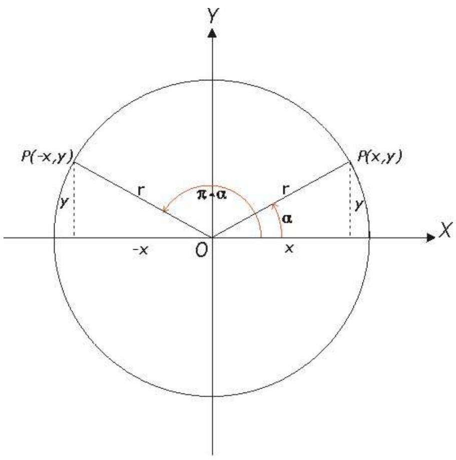
Ángulo	Seno	Coseno	Tangente
30º	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45º	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60º	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

Razones trigonométricas de los ángulos 0º, 90º, 180º y 270º:

Ángulo	Seno	Coseno	Tangente
0º	0	1	0
90º	1	0	$\pm\infty$
180º	0	-1	0
270º	-1	0	$\pm\infty$

Reducción al primer cuadrante

Dado un ángulo α no perteneciente al primer cuadrante, podemos encontrar otro ángulo α_1 que sí pertenezca a ese cuadrante y cuyas razones trigonométricas permitan obtener las de α, es lo que llamamos reducción al primer cuadrante. Estudiaremos 3 casos:



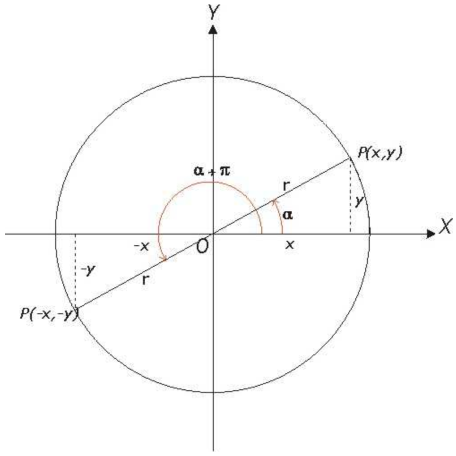
A) Los ángulos α y π-α son **suplementarios**, es decir, sumados dan π (180º). Observando el dibujo, se puede deducir que:

$$sen(\pi-\alpha)=\frac{y}{r}=sen\alpha$$

$$\cos(\pi-\alpha)=\frac{-x}{r}=-\cos\alpha$$

$$tg(\pi-\alpha)=\frac{y}{-x}=-tag\alpha$$

B) En este caso, los ángulos se diferencian en π radianes (180º). De la misma manera que en el caso anterior podemos deducir que:

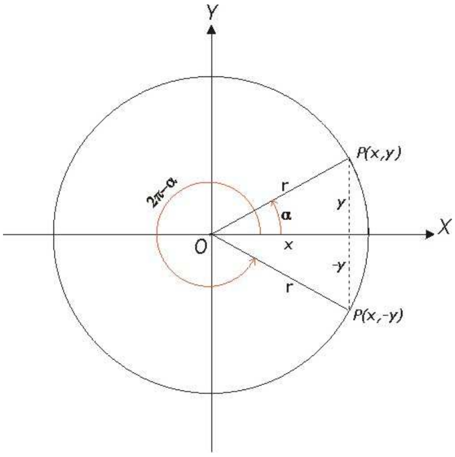


$$sen(\pi+\alpha)=\frac{-y}{r}=-sen\alpha$$

$$\cos(\pi+\alpha)=\frac{-x}{r}=-\cos\alpha$$

$$tg(\pi+\alpha)=\frac{-y}{-x}=tag\alpha$$

C) Veamos por último las razones de los ángulos que sumados dan 2π radianes (360º)



$$sen(2\pi-\alpha)=\frac{-y}{r}=-sen\alpha$$

$$\cos(2\pi-\alpha)=\frac{x}{r}=\cos\alpha$$

$$tg(2\pi-\alpha)=\frac{-y}{x}=-tag\alpha$$

Resolución de triángulos rectángulos

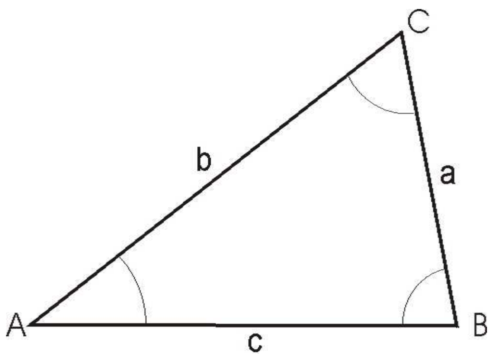
Resolver un triángulo rectángulo es conocer sus tres lados y sus tres ángulos (uno de los cuales es 90º). Para ello utilizaremos las razones trigonométricas que ya hemos visto que nos relacionan ángulos y lados y el Teorema de Pitágoras (recuerda que es “hipotenusa al cuadrado = suma de los cuadrados de los catetos”, $\mathbf{h^2 = c_1^2 + c_2^2}$).

Resolución de triángulos cualesquiera

Para resolver este tipo de triángulos utilizaremos los siguientes teoremas:

Teorema de los senos:

$$\frac{a}{senA}=\frac{b}{senB}=\frac{c}{senC}$$



Teorema del coseno:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\,a\,c\cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos C$$

(Para poder aplicar el este teorema necesitamos conocer dos lados y el ángulo comprendido)

Teorema de Neper o de las tangentes:

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{tg\,\frac{A-B}{2}}{tg\,\frac{A+B}{2}}$$