PRODUCTOS NOTABLES Y FACTORIZACIÓN

UNIDAD V

V.1 PRODUCTOS NOTABLES

Tanto en la multiplicación algebraica como en la aritmética se sigue un algoritmo cuyos pasos conducen al resultado. Sin embargo, existen productos algebraicos que responden a una regla cuya aplicación simplifica la obtención del resultado. Estos productos reciben el nombre de *productos notables*.

Se llama producto notable al que puede ser obtenido sin efectuar la multiplicación término a término. A continuación se describen los más importantes.

V.1.1 CUADRADO DE UN BINOMIO

El producto de un binomio por sí mismo recibe el nombre de cuadrado de un binomio.

El desarrollo del cuadrado del binomio $a+b$ se puede obtener multiplicando término a término:

$$(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+ab+ba+b^2=a^2+2ab+b^2$$

"*El cuadrado de un binomio $a+b$ es igual al cuadrado del primer término más el doble del producto de los términos más el cuadrado del segundo término"*.

Ahora, al elevar al cuadrado el binomio $a-b$, también multiplicando término a término, se obtiene:

$$(a-b)^2=(a-b)(a-b)=a^2-ab-ba+b^2=a^2-2ab+b^2$$

"*El cuadrado de un binomio $a-b$ es igual al cuadrado del primer término menos el doble del producto de los términos más el cuadrado del segundo término"*.

En las fórmulas anteriores a y b pueden ser cualquier expresión algebraica y tener cualquier signo. Por lo tanto, segunda la fórmula es un caso particular de la primera ya que:
$(a-b)^2=[a+(-b)]^2=a^2+2a(-b)+b^2=a^2-2ab+b^2$

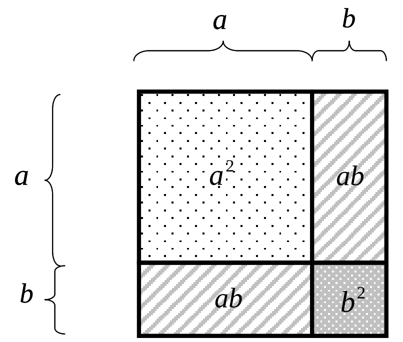
Ejemplos.

1) $(a+4)^2=a^2+2(a)(4)+4^2=a^2+8a+16$
2) $(2x+3y)^2=(2x)^2+2(2x)(3y)+(3y)^2=4x^2+12xy+9y^2$
3) $(b-5)^2=b^2+2(b)(-5)+5^2=b^2-10b+25$
4) $(6k-8m)^2=(6k)^2+2(6k)(-8m)+(-8m)^2=36k^2-96km+64m^2$
5) $\left(\frac{2}{3}a+\frac{5}{4}b\right)^2=\left(\frac{2}{3}a\right)^2+2\left(\frac{2}{3}a\right)\left(\frac{5}{4}b\right)+\left(\frac{5}{4}b\right)^2=\frac{4}{9}a^2+\frac{5}{3}ab+\frac{25}{16}b^2$
6) $(7p^2-9q^3)^2=(7p^2)^2+2(7p^2)(-9q^3)+(9q^3)^2=49p^4-126p^2q^3+81q^6$
7) $(-2k+5)^2=(-2k)^2+2(-2k)(5)+5^2=4k^2-20k+25$

8) $\left(-10\alpha^4-7\lambda\right)^2=\left(-10\alpha^4\right)^2+2\left(-10\alpha^4\right)\left(-7\lambda\right)+\left(-7\lambda\right)^2=100\alpha^8+140\alpha^4\lambda+49\lambda^2$

Representación geométrica de $(a+b)^2$:

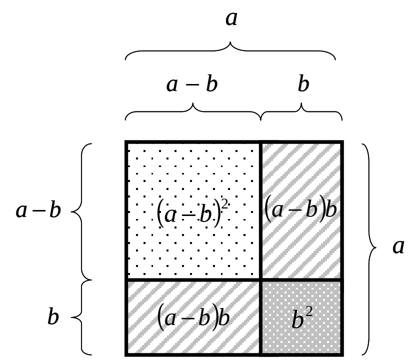
Consiste en considerar el área de un cuadrado de lados $a+b$ y las regiones que estas medidas generan en el cuadrado. Los segmentos a y b horizontales y verticales dividen al cuadrado en cuatro áreas menores: dos cuadrados, uno de lado a y otro menor de lado b, y dos rectángulos de largo a y ancho b. La suma de las áreas de estos cuadrados y rectángulos es igual al área total del cuadrado de lado $a+b$:



$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

Representación geométrica de $(a-b)^2$:

Consiste en considerar el área de un cuadrado de lados a. Los segmentos $a-b$ y b horizontales y verticales dividen al cuadrado en cuatro áreas menores: dos cuadrados, uno de lado $a-b$ y otro menor de lado b, y dos rectángulos de largo $a-b$ y ancho b. La suma de las áreas de estos cuadrados y rectángulos es igual al área total del cuadrado de lado a^2. Por lo tanto, el área del cuadrado de $a-b$ es igual al área total menos el área de los rectángulos menos el área del cuadrado menor, esto es: $(a-b)^2=a^2-2(a-b)b-b^2=a^2-2ab+2b^2-b^2=a^2-2ab+b^2$



$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

V.1.2 CUADRADO DE UN POLINOMIO

El producto de un trinomio por sí mismo recibe el nombre de cuadrado de un trinomio.

El desarrollo del cuadrado del trinomio $a+b+c$ se puede obtener de la siguiente forma:

$$(a+b+c)^2=[(a+b)+c]^2=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2=a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2$$

ordenando se tiene

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$$

Por su parte, el desarrollo del cuadrado del polinomio de cuatro términos $a+b+c+d$ se puede obtener de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}(a+b+c+d)^2&=[(a+b)+(c+d)]^2=(a+b)^2+2(a+b)(c+d)+(c+d)^2\\&=a^2+2ab+b^2+2ac+2ad+2bc+2bd+c^2+2cd+d^2\end{aligned}$$

ordenando se llega a:

$$(a+b+c+d)^2=a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd$$

En general, *el cuadrado de un polinomio está dado por la suma de los cuadrados de cada uno de sus términos más el doble producto algebraico de sus términos, tomados de dos en dos*.

Ejemplos.

1) $(a+2b+3c)^2 = a^2+(2b)^2+(3c)^2+2(a)(2b)+2(a)(3c)+2(2b)(3c)$
$= a^2+4b^2+9c^2+4ab+6ac+12bc$

2) $(5x-8y-6z)^2 = (5x)^2+(-8y)^2+(-6z)^2+2(5x)(-8y)+2(5x)(-6z)+2(-8y)(-6z)$
$= 25x^2+64y^2+36z^2-80xy-60xz+96yz$

3) $\left(\frac{1}{2}e+\frac{2}{5}f-\frac{3}{4}g\right)^2 = \left(\frac{1}{2}e\right)^2+\left(\frac{2}{5}f\right)^2+\left(-\frac{3}{4}g\right)^2+2\left(\frac{1}{2}e\right)\left(\frac{2}{5}f\right)+2\left(\frac{1}{2}e\right)\left(-\frac{3}{4}g\right)+$
$2\left(\frac{2}{5}f\right)\left(-\frac{3}{4}g\right)=\frac{1}{4}e^2+\frac{4}{25}f^2+\frac{9}{16}g^2+\frac{2}{5}ef-\frac{3}{4}eg-\frac{3}{5}fg$

4) $(4a-7b+9c-5d)^2 = (4a)^2+(-7b)^2+(9c)^2+(-5d)^2+2(4a)(-7b)+2(4a)(9c)+$
$2(4a)(-5d)+2(-7b)(9c)+2(-7b)(-5d)+2(9c)(-5d)$
$=16a^2+49b^2+81c^2+25d^2-56ab+72ac-40ad-126bc+70bd-90cd$

5) $(2p^3+6q-10r^2+t)^2 = (2p^3)^2+(6q)^2+(-10r^2)^2+t^2+2(2p^3)(6q)+2(2p^3)(-10r^2)+2(2p^3)(t)+$
$2(6q)(-10r^2)+2(6q)(t)+2(-10r^2)(t)$
$=4p^6+36q^2+100r^4+t^2+24p^3q-40p^3r^2+4p^3t-120qr^2+12qt-20r^2t$

6) $\left(\frac{3}{2}h^2j-\frac{7}{4}k^2m^3-\frac{5}{2}n+6p^2q^4s\right)^2 = \left(\frac{3}{2}h^2j\right)^2+\left(-\frac{7}{4}k^2m^3\right)^2+\left(-\frac{5}{2}n\right)^2+(6p^2q^4s)^2+$
$2\left(\frac{3}{2}h^2j\right)\left(-\frac{7}{4}k^2m^3\right)+2\left(\frac{3}{2}h^2j\right)\left(-\frac{5}{2}n\right)+2\left(\frac{3}{2}h^2j\right)(6p^2q^4s)+$
$2\left(-\frac{7}{4}k^2m^3\right)\left(-\frac{5}{2}n\right)+2\left(-\frac{7}{4}k^2m^3\right)(6p^2q^4s)+2\left(-\frac{5}{2}n\right)(6p^2q^4s)$
$=\frac{9}{4}h^4j^2+\frac{49}{16}k^4m^6+\frac{25}{4}n^2+36p^4q^8s^2-\frac{21}{4}h^2jk^2m^3-$
$\frac{15}{2}h^2jn+18h^2jp^2q^4s+\frac{35}{4}k^2m^3n-21k^2m^3p^2q^4s-30np^2q^4s$

V.1.3 PRODUCTO DE DOS BINOMIOS CONJUGADOS

Dos binomios son *conjugados* si difieren sólo por el signo de uno de sus términos.

Ejemplos.

1) $(4a+3b)$ y $(4a-3b)$
2) $(2k-5j)$ y $(2k+5j)$

Al efectuar el producto de un binomio $a+b$ por su conjugado $a-b$, se tiene:

$$(a+b)(a-b)=a^2-ab+ba-b^2=a^2-b^2$$

esto significa que *el producto de dos binomios conjugados es igual a la diferencia de los cuadrados de sus términos*.

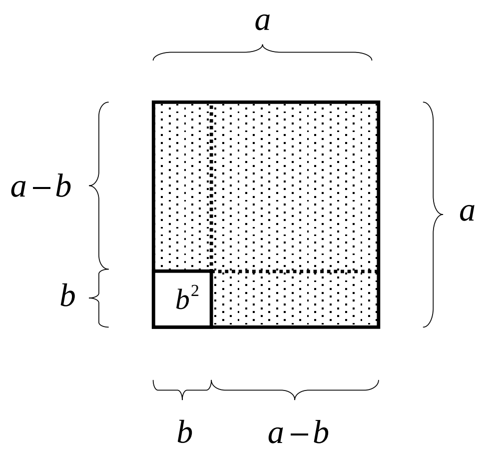
Esto es:

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

Ejemplos.

1) $(k+3)(k-3)=k^2-9$
2) $(3x+2y)(3x-2y)=9x^2-4y^2$
3) $(5a+8b)(5a-8b)=25a^2-64b^2$
4) $(4w^2+7z^3)(4w^2-7z^3)=16w^4-49z^6$
5) $\left(\frac{1}{2}x+\frac{3}{5}y\right)\left(\frac{1}{2}x-\frac{3}{5}y\right)=\frac{1}{4}x^2-\frac{9}{25}y^2$
6) $(6jk+4mn)(6jk-4mn)=36j^2k^2-16m^2n^2$
7) $(10r^2t^3v^4+12s^2u^5w)(10r^2t^3v^4-12s^2u^5w)=100r^4t^6v^8-144s^4u^{10}w^2$
8) $(-\alpha+1)(\alpha+1)=1-\alpha^2$

La representación del producto de dos binomios conjugados se efectúa a partir de un cuadrado de lado a y un cuadrado interior de lado b. El área sombreada representa a^2-b^2 y está dada por la suma de los rectángulos $(a-b)a$ y $b(a-b)$, esto es, $(a+b)(a-b)$:



$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

V.1.4 PRODUCTO DE DOS BINOMIOS CON UN TÉRMINO COMÚN

Este producto notable corresponde a la multiplicación de binomios cuyo término común es x de la forma $(x+a)$ por $(x+b)$. Al desarrollar el producto se tiene: $(x+a)(x+b)=x^2+xb+xa+ab$, que se puede agrupar como sigue:

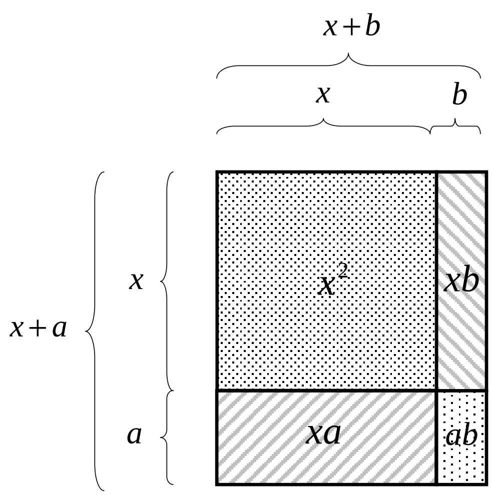
$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$$

Esto significa que *el producto de binomios con un término común es el cuadrado del término común, más la suma de los términos distintos multiplicada por el término común y más el producto de los términos distintos*.

Ejemplos.

1) $(x+2)(x+3)=x^2+(2+3)x+(2)(3)=x^2+5x+6$
2) $(a-1)(a+4)=a^2+(-1+4)a+(-1)(4)=a^2+3a-4$
3) $(2b+5)(2b+3)=(2b)^2+(5+3)(2b)+(5)(3)=4b^2+16b+15$
4) $(3z-6)(3z-7)=(3z)^2+(-6-7)(3z)+(-6)(-7)=9z^2-39z+42$
5) $\left(\frac{7}{4}x-5\right)\left(\frac{7}{4}x-1\right)=\left(\frac{7}{4}x\right)^2+(-5-1)\left(\frac{7}{4}x\right)+(-5)(-1)=\frac{49}{16}x^2-\frac{21}{2}x+5$
6) $(2e^4+8)(2e^4-11)=(2e^4)^2+(8-11)(2e^4)+(8)(-11)=4e^8-6e^4-88$
7) $(5\alpha^3\beta^2-4)(5\alpha^3\beta^2+7)=(5\alpha^3\beta^2)^2+(-4+7)(5\alpha^3\beta^2)+(-4)(7)=25\alpha^6\beta^4+15\alpha^3\beta^2-28$
8) $(-k+5)(-k+12)=(-k)^2+(5+12)(-k)+(5)(12)=k^2-17k+60$

Para representar el producto de dos binomios con un término común se utiliza un cuadrado de lado x. A uno de los lados se le agrega una cantidad a y a otro se le agrega una cantidad b, por lo que se forma una superficie con cuatro regiones:



$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$$

El área total que es $(x+a)(x+b)$, también está dada por la suma de cada una de las áreas, es decir $x^2 + xb + xa + ab$, que en forma simplificada es: $x^2 + (a+b)x + ab$.

V.1.5 CUBO DE UN BINOMIO

El desarrollo del cubo del binomio $a+b$ se puede obtener multiplicando este binomio por su cuadrado:

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)(a+b)^2 = (a+b)(a^2+2ab+b^2)\\ &= a^3+2a^2b+ab^2+ba^2+2ab^2+b^3\end{aligned}$$

que simplificado es:

$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

Por su parte, el desarrollo del cubo del binomio $a-b$, se obtiene de forma similar:

$$\begin{aligned}(a-b)^3 &= (a-b)(a-b)^2 = (a-b)(a^2-2ab+b^2)\\ &= a^3-2a^2b+ab^2-ba^2+2ab^2-b^3\end{aligned}$$

que simplificado es:

$$(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

En las fórmulas anteriores a y b pueden ser cualquier expresión algebraica y tener cualquier signo. Por lo tanto, segunda la fórmula es un caso particular de la primera ya que:
$(a-b)^3 = [a+(-b)]^3 = a^3+3a^2(-b)+3a(-b)+b^3 = a^3-3a^2b+3ab^2+b^3$

Considerando lo anterior, se aprecia que el desarrollo anterior presenta la siguiente estructura:

El cubo de la suma de dos términos es igual al cubo del primer término más el triple del cuadrado del primer término por el segundo más el triple del primer término por el cuadrado del segundo más el cubo del segundo término.

Ejemplos.

1) $(a+2)^3 = a^3+3(a^2)(2)+3(a)(2^2)+2^3 = a^3+3(a^2)(2)+3(a)(4)+8 = a^3+6a^2+12a+8$

2) $(k-5)^3 = k^3+3(k^2)(-5)+3(k)(-5)^2+(-5)^3 = k^3+3(k^2)(-5)+3(k)(25)-125$
$\quad = k^3-15k^2+75k-125$

3) $(4x+y)^3 = (4x)^3+3(4x)^2(y)+3(4x)(y^2)+y^3 = 64x^3+3(16x^2)(y)+3(4x)(y^2)+y^3$
$\quad = 64x^3+48x^2y+12xy^2+y^3$

4) $(6c-7d)^3 = (6c)^3+3(6c)^2(-7d)+3(6c)(-7d)^2+(-7d)^3$
$\quad = 216c^3+3(36c^2)(-7d)+3(6c)(49d^2)-343d^3 = 216c^3-756c^2d+882cd^2-343d^3$

5) $\left(\frac{1}{3}a+\frac{2}{5}b\right)^3 = \left(\frac{1}{3}a\right)^3+3\left(\frac{1}{3}a\right)^2\left(\frac{2}{5}b\right)+3\left(\frac{1}{3}a\right)\left(\frac{2}{5}b\right)^2+\left(\frac{2}{5}b\right)^3$

$$= \frac{1}{27}a^3 + 3\left(\frac{1}{9}a^2\right)\left(\frac{2}{5}b\right) + 3\left(\frac{1}{3}a\right)\left(\frac{4}{25}b^2\right)$$
$$+ \frac{8}{125}b^3 = \frac{1}{27}a^3 + \frac{2}{15}a^2b + \frac{4}{25}ab^2 + \frac{8}{125}b^3 = \frac{1}{27}a^3 + \frac{2}{15}a^2b + \frac{4}{25}ab^2 + \frac{8}{125}b^3$$

6) $\left(4x^3 - 8y^2\right)^3 = \left(4x^3\right)^3 + 3\left(4x^3\right)^2\left(-8y^2\right) + 3\left(4x^3\right)\left(-8y^2\right)^2 + \left(-8y^2\right)^3$
$$= 64x^9 + 3\left(16x^6\right)\left(-8y^2\right) + 3\left(4x^3\right)\left(64y^4\right) - 512y^6 = 64x^9 - 384x^6y^2 + 768x^3y^4 - 512y^6$$

7) $(-3a+10)^3 = (-3a)^3 + 3(-3a)^2(10) + 3(-3a)(10)^2 + (10)^3$
$$= -27a^3 + 3\left(9a^2\right)(10) + 3(-3a)(100) + 1000 = -27a^3 + 270a^2 - 900a + 1000$$

8) $(-9z-2)^3 = (-9z)^3 + 3(-9z)^2(-2) + 3(-9z)(-2)^2 + (-2)^3$
$$= -729z^3 + 3\left(81z^2\right)(-2) + 3(-9z)(4) - 8 = -729z^3 - 486z^2 - 108z - 8$$

V.1.6 CUBO DE UN TRINOMIO

El desarrollo de un cubo de trinomio $a+b+c$ se obtiene multiplicando este trinomio por su cuadrado:

$$(a+b+c)^3 = (a+b+c)(a+b+c)^2 = (a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc\right)$$
$$= a^3 + ab^2 + ac^2 + 2a^2b + 2a^2c + 2abc + a^2b + b^3 + bc^2 + 2ab^2 + 2abc + 2b^2c$$
$$+ a^2c + b^2c + c^3 + 2abc + 2ac^2 + 2bc^2$$

simplificado queda como:

$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 3a^2c + 3ac^2 + 3b^2c + 3bc^2 + 6abc$$

El resultado consta de diez términos y presenta la siguiente estructura:

El cubo de un trinomio es igual a la suma de los cubos de cada uno de los términos, más el triple producto del cuadrado de cada término por cada uno de los términos restantes más seis veces el producto de los tres términos.

Ejemplos.

1) $(4a+2b+5c)^3 = (4a)^3 + (2b)^3 + (5c)^3 + 3(4a)^2(2b) + 3(4a)(2b)^2 + 3(4a)^2(5c)$
$$+ 3(4a)(5c)^2 + 3(2b)^2(5c) + 3(2b)(5c)^2 + 6(4a)(2b)(5c)$$
$$= 64a^3 + 8b^3 + 125c^3 + 3\left(16a^2\right)(2b) + 3(4a)\left(4b^2\right) + 3\left(16a^2\right)(5c)$$
$$+ 3(4a)\left(25c^2\right) + 3\left(4b^2\right)(5c) + 3(2b)\left(25c^2\right) + 6(4a)(2b)(5c)$$
$$= 64a^3 + 8b^3 + 125c^3 + 96a^2b + 48ab^2 + 240a^2c + 300ac^2$$
$$+ 60b^2c + 150bc^2 + 240abc$$

2) $(3x-6y-1)^3 = (3x)^3 + (-6y)^3 + (-1)^3 + 3(3x)^2(-6y) + 3(3x)(-6y)^2 + 3(3x)^2(-1)$
$$+ 3(3x)(-1)^2 + 3(-6y)^2(-1) + 3(-6y)(-1)^2 + 6(3x)(-6y)(-1)$$
$$= 27x^3 - 216y^3 - 1 + 3\left(9x^2\right)(-6y) + 3(3x)\left(36y^2\right) + 3\left(9x^2\right)(-1)$$
$$+ 3(3x)(1) + 3\left(36y^2\right)(-1) + 3(-6y)(1) + 6(3x)(-6y)(-1)$$

$$= 27x^3 - 216y^3 - 1 - 162x^2y + 324xy^2 - 27x^2 + 9x - 108y^2 - 18y + 108xy$$

3) $$\left(\frac{1}{2}e + \frac{2}{3}f - \frac{3}{4}g\right)^3 = \left(\frac{1}{2}e\right)^3 + \left(\frac{2}{3}f\right)^3 + \left(-\frac{3}{4}g\right)^3 + 3\left(\frac{1}{2}e\right)^2\left(\frac{2}{3}f\right) + 3\left(\frac{1}{2}e\right)\left(\frac{2}{3}f\right)^2$$
$$+3\left(\frac{1}{2}e\right)^2\left(-\frac{3}{4}g\right) + 3\left(\frac{1}{2}e\right)\left(-\frac{3}{4}g\right)^2 + 3\left(\frac{2}{3}f\right)^2\left(-\frac{3}{4}g\right) + 3\left(\frac{2}{3}f\right)\left(-\frac{3}{4}g\right)^2$$
$$+6\left(\frac{1}{2}e\right)\left(\frac{2}{3}f\right)\left(-\frac{3}{4}g\right)$$
$$= \frac{1}{8}e^3 + \frac{8}{27}f^3 - \frac{27}{64}g^3 + 3\left(\frac{1}{4}e^2\right)\left(\frac{2}{3}f\right) + 3\left(\frac{1}{2}e\right)\left(\frac{4}{9}f^2\right)$$
$$+3\left(\frac{1}{4}e^2\right)\left(-\frac{3}{4}g\right) + 3\left(\frac{1}{2}e\right)\left(\frac{9}{16}g^2\right) + 3\left(\frac{4}{9}f^2\right)\left(-\frac{3}{4}g\right) + 3\left(\frac{2}{3}f\right)\left(\frac{9}{16}g^2\right)$$
$$+6\left(\frac{1}{2}e\right)\left(\frac{2}{3}f\right)\left(-\frac{3}{4}g\right)$$
$$= \frac{1}{8}e^3 + \frac{8}{27}f^3 - \frac{27}{64}g^3 + \frac{1}{2}e^2f + \frac{2}{3}ef^2 - \frac{9}{16}e^2g + \frac{27}{32}eg^2$$
$$- f^2g + \frac{9}{8}fg^2 - \frac{3}{2}efg$$

4) $$\left(-5\beta^2 - 4\delta^3 + 10\lambda^4\right)^3 = \left(-5\beta^2\right)^3 + \left(-4\delta^3\right)^3 + \left(10\lambda^4\right)^3 + 3\left(-5\beta^2\right)^2\left(-4\delta^3\right)$$
$$+3\left(-5\beta^2\right)\left(-4\delta^3\right)^2 + 3\left(-5\beta^2\right)^2\left(10\lambda^4\right) + 3\left(-5\beta^2\right)\left(10\lambda^4\right)^2$$
$$+3\left(-4\delta^3\right)^2\left(10\lambda^4\right) + 3\left(-4\delta^3\right)\left(10\lambda^4\right)^2 + 6\left(-5\beta^2\right)\left(-4\delta^3\right)\left(10\lambda^4\right)$$
$$= -125\beta^6 - 64\delta^9 + 1000\lambda^{12} + 3\left(25\beta^4\right)\left(-4\delta^3\right) + 3\left(-5\beta^2\right)\left(16\delta^6\right)$$
$$+3\left(25\beta^4\right)\left(10\lambda^4\right) + 3\left(-5\beta^2\right)\left(100\lambda^8\right) + 3\left(16\delta^6\right)\left(10\lambda^4\right) + 3\left(-4\delta^3\right)\left(100\lambda^8\right)$$
$$+6\left(-5\beta^2\right)\left(-4\delta^3\right)\left(10\lambda^4\right)$$
$$= -125\beta^6 - 64\delta^9 + 1000\lambda^{12} - 300\beta^4\delta^3 - 240\beta^2\delta^6 + 750\beta^4\lambda^4$$
$$-1{,}500\beta^2\lambda^8 + 480\delta^6\lambda^4 - 1{,}200\delta^3\lambda^8 + 1{,}200\beta^2\delta^3\lambda^4$$

V.1.7 SUMA Y RESTA DE CUBOS

Para obtener la suma de dos cubos de la forma $a^3 + b^3$ se efectúa el siguiente producto:

$(a+b)(a^2 - ab + b^2)$

cuyo desarrollo es: $a^3 - a^2b + ab^2 + a^2b - ab^2 + b^3$

y simplificando se tiene: $a^3 + b^3$

Esto significa que:

La suma de los cubos de dos términos es igual al producto de la suma de los términos, por un trinomio formado por el cuadrado del primer término, menos el producto de los dos, más el cuadrado del segundo.

Es decir:

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$$

Ejemplos.
Comprobar que los productos indicados representan la suma de dos cubos.

1) $(x+1)(x^2-x+1)$
Solución.
$(x+1)(x^2-x+1)=x^3-x^2+x+x^2-x+1=x^3+1=x^3+1^3$
2) $(2a+3b)(4a^2-6ab+9b^2)$
Solución:
$(2a+3b)(4a^2-6ab+9b^2)=8a^3-12a^2b+18ab^2+12a^2b-18ab^2+27b^3$
$=8a^3+27b^3=(2a)^3+(3b)^3$
3) $(4k^2+5j^6)(16k^4-20k^2j^6+25j^{12})$
Solución:
$(4k^2+5j^6)(16k^4-20k^2j^6+25j^{12})=64k^6-80k^4j^6+100k^2j^{12}+80j^6k^4-100k^2j^{12}+125j^{18}$
$=64k^6+125j^{18}=(4k^2)^3+(5j^6)^3$

Similarmente, para obtener la diferencia de dos cubos de la forma a^3-b^3 se efectúa el siguiente producto:

$(a-b)(a^2+ab+b^2)$

cuyo desarrollo es: $a^3+a^2b+ab^2-a^2b-ab^2-b^3$

y simplificando se tiene: a^3-b^3

Esto significa que:

La diferencia de los cubos de dos términos es igual al producto de la diferencia de los términos, por un trinomio formado por el cuadrado del primer término, más el producto de los dos, más el cuadrado del segundo.

Es decir:

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$$

Ejemplos.
Comprobar que los productos indicados representan la diferencia de dos cubos

1) $(y-2)(y^2+2y+4)$
Solución.
$(y-2)(y^2+2y+4)=y^3+2y^2+4y-2y^2-4y-8=y^3-8=y^3-2^3$

2) $(5p-6q)(25p^2+30pq-36q^2)$

Solución:

$$(5p-6q)(25p^2+30pq-36q^2)=125p^3+150p^2q-180pq^2-150qp^2-180pq^2-216q^3$$
$$=125p^3-216q^3=(5p)^3-(6q)^3$$

3) $\left(\frac{1}{2}a-\frac{3}{5}b\right)\left(\frac{1}{4}a^2+\frac{3}{10}ab+\frac{9}{25}b^2\right)$

Solución:

$$\left(\frac{1}{2}a-\frac{3}{5}b\right)\left(\frac{1}{4}a^2+\frac{3}{10}ab+\frac{9}{25}b^2\right)=\frac{1}{8}a^3+\frac{3}{20}a^2b+\frac{9}{50}ab^2-\frac{3}{20}a^2b-\frac{9}{50}ab^2-\frac{27}{125}b^3$$
$$=\frac{1}{8}a^3-\frac{27}{125}b^3=\left(\frac{1}{2}a\right)^3-\left(\frac{3}{5}b\right)^3$$

V.1.8 BINOMIO DE NEWTON

El teorema del binomio, también llamado *binomio de Newton*, expresa la enésima potencia de un binomio como un polinomio. El desarrollo del binomio $(a+b)^n$ posee singular importancia ya que aparece con mucha frecuencia en Matemáticas y posee diversas aplicaciones en otras áreas del conocimiento.

Si el binomio de la forma $(a+b)$ se multiplica sucesivamente por si mismo se obtienen las siguientes potencias:

$$(a+b)^1=a+b$$
$$(a+b)^2=\underbrace{(a+b)(a+b)}_{2\ veces}=a^2+2ab+b^2$$
$$(a+b)^3=\underbrace{(a+b)(a+b)(a+b)}_{3\ veces}=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$
$$(a+b)^4=\underbrace{(a+b)\cdots(a+b)}_{4\ veces}=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$
$$(a+b)^5=\underbrace{(a+b)\cdots(a+b)}_{5\ veces}=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$$
$$(a+b)^6=\underbrace{(a+b)\cdots(a+b)}_{6\ veces}=a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$$

De los desarrollos anteriores, se observa que:

- El desarrollo de $(a+b)^n$ tiene $n+1$ términos
- El exponente de a empieza con n en el primer término y va disminuyendo en uno con cada término, hasta cero en el último
- El exponente de b empieza con cero en el primer término y va aumentando en uno con cada término, hasta n en el último

- Para cada término la suma de los exponentes de a y b es n
- El coeficiente del primer término es uno y el del segundo es n
- El coeficiente de un término cualquiera es igual al producto del coeficiente del término anterior por el exponente de a dividido entre el número que indica el orden de ese término
- Los términos que equidistan de los extremos tienen coeficientes iguales.

Ejemplo.

$$(a+b)^6 = \underset{\substack{\uparrow \\ es\,1}}{a^6} + \underset{\substack{\uparrow \\ \frac{1(6)}{1}}}{6a^5b} + \underset{\substack{\uparrow \\ \frac{6(5)}{2}}}{15a^4b^2} + \underset{\substack{\uparrow \\ \frac{15(4)}{3}}}{20a^3b^3} + \underset{\substack{\uparrow \\ \frac{20(3)}{4}}}{15a^2b^4} + \underset{\substack{\uparrow \\ \frac{15(2)}{5}}}{6ab^5} + \underset{\substack{\uparrow \\ \frac{6(1)}{6}}}{b^6}$$

Aplicando las consideraciones expuestas en los incisos para el caso general se tiene:

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1(2)}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1(2)(3)}a^{n-3}b^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1(2)(3)(4)}a^{n-4}b^4 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1(2)(3)(4)(5)}a^{n-5}b^5 + \cdots + b^n$$

Se define como *factorial* de un número natural n al producto de n por todos los números que le preceden hasta el uno. Se denota mediante $n!$:

$$n! = 1(2)(3)(4)\cdots(n-1)(n)$$

Por definición, el factorial de cero es uno: $0! \equiv 1$

Ejemplos.

$3! = 1(2)(3) = 6$

$5! = 1(2)(3)(4)(5) = 120$

$8! = 1(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8) = 40{,}320$

$14! = 1(2)(3)(4)\cdots(13)(14) = 87{,}178'291{,}200$

Ahora, si se introduce la notación factorial, la fórmula del binomio puede escribirse así:

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1!}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}a^{n-4}b^4 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5!}a^{n-5}b^5 + \cdots + b^n$$

Ejemplos.

1) Obtener el desarrollo de $(3x-4y)^4$

Solución.

Haciendo $a = 3x$, $b = -4y$ y $n = 4$

Aplicando la fórmula se tiene:

$$(3x-4y)^4 = (3x)^4 + \frac{4}{1!}(3x)^3(-4y) + \frac{4(3)}{2!}(3x)^2(-4y)^2 + \frac{4(3)(2)}{3!}(3x)(-4y)^3 + (-4y)^4$$

$$(3x-4y)^4 = (3x)^4 + \frac{4}{1}(3x)^3(-4y) + \frac{12}{2}(3x)^2(-4y)^2 + \frac{24}{6}(3x)(-4y)^3 + (-4y)^4$$

$$= 81x^4 + \frac{4}{1}(27x^3)(-4y) + \frac{12}{2}(9x^2)(16y^2) + \frac{24}{6}(3x)(-64y^3) + 256y^4$$
$$= 81x^4 - 432x^3y + 864x^2y^2 - 768xy^3 + 256y^4$$

2) Hallar la expansión de $(5x+2y)^5$
Solución.
Haciendo $a = 5x$, $b = 2y$ y $n = 5$
Aplicando la fórmula se tiene:

$$(5x+2y)^5 = (5x)^5 + \frac{5}{1!}(5x)^4(2y) + \frac{5(4)}{2!}(5x)^3(2y)^2 + \frac{5(4)(3)}{3!}(5x)^2(2y)^3 + \frac{5(4)(3)(2)}{4!}(5x)(2y)^4$$
$$+ (2y)^5$$
$$= 3{,}125x^5 + 5(625x^4)(2y) + 10(125x^3)(4y^2) + 10(25x^2)(8y^3) + 5(5x)(16y^4) + 32y^5$$
$$= 3{,}125x^5 + 6{,}250x^4y + 5{,}000x^3y^2 + 2{,}000x^2y^3 + 400xy^4 + 32y^5$$

En el desarrollo binomial:

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1!}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \cdots + \frac{n(n-1)}{2!}a^2b^{n-2} + \frac{n}{1!}ab^{n-1} + b^n$$

Analizando las características del desarrollo y si se decide llamar a un término cualquiera del desarrollo como *r-ésimo término*, se observa que:

- El exponente de b es: $r-1$
- El exponente de a es: $n-(r-1) = n-r+1$
- El denominador del coeficiente es: $(r-1)!$
- El numerador del coeficiente es: $n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+2)$

En consecuencia el r-ésimo término de la expansión de $(a+b)^n$ es:

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+2)}{(r-1)!}a^{n-r+1}b^{r-1}$$

Ejemplos.

1) Encontrar el tercer término del desarrollo $(2k-6m)^5$
Solución.
$a = 2k,\ b = -6m,\ \ n = 5,\ r = 3$
Aplicando la expresión se tiene: $\frac{(5)(4)}{2!}(2k)^3(-6m)^2 = 10(8k^3)(36m^2) = 2{,}880k^3m^2$

2) Calcular el sexto término del desarrollo $(x+4y)^7$
Solución.
$a = x,\ b = 4y,\ \ n = 7,\ r = 6$
Aplicando la expresión se tiene: $\frac{7(6)(5)(4)(3)}{5!}x^2(4y)^5 = 21x^2(1024y^5) = 21{,}504x^2y^5$

El triángulo de Pascal es un esquema que tiene como característica que cada uno de los componentes de sus filas representa los coeficientes del desarrollo binomial.

Se construye de la siguiente manera: Se empieza por el 1 de la cumbre. De una fila a la siguiente se escriben los números con un desfase de medio lugar o casilla para que cada casilla tenga dos números justo arriba, en la fila anterior. Cada extremo de la fila tiene un 1 y el valor que se escribe en una casilla es la suma de los números que están encima.

Después, se efectúa una relación entre los números del triángulo de Pascal y la suma de las potencias de a y b, de forma que los coeficientes se asignan en el mismo orden en que aparecen. Gráficamente esto es:

$$\begin{array}{lc}
(a+b)^0 & \mathbf{1} \\
(a+b)^1 & \mathbf{1} \quad \mathbf{1} \\
(a+b)^2 & \mathbf{1} \quad \mathbf{2} \quad \mathbf{1} \\
(a+b)^3 & \mathbf{1} \quad \mathbf{3} \quad \mathbf{3} \quad \mathbf{1} \\
(a+b)^4 & \mathbf{1} \quad \mathbf{4} \quad \mathbf{6} \quad \mathbf{4} \quad \mathbf{1} \\
(a+b)^5 & \mathbf{1} \quad \mathbf{5} \quad \mathbf{10} \quad \mathbf{10} \quad \mathbf{5} \quad \mathbf{1} \\
(a+b)^6 & \mathbf{1} \quad \mathbf{6} \quad \mathbf{15} \quad \mathbf{20} \quad \mathbf{15} \quad \mathbf{6} \quad \mathbf{1} \\
(a+b)^7 & \mathbf{1} \quad \mathbf{7} \quad \mathbf{21} \quad \mathbf{35} \quad \mathbf{35} \quad \mathbf{21} \quad \mathbf{7} \quad \mathbf{1}
\end{array}$$

Por ejemplo, para encontrar los coeficientes del desarrollo $(a+b)^6$, se le aplican los factores de la séptima fila, tal y como se muestra en la siguiente figura:

$$\begin{array}{ccccccc}
a^6 & a^5b & a^4b^2 & a^3b^3 & a^2b^4 & ab^5 & b^6 \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow
\end{array}$$

$$a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$$

Ejemplos.

1) Aplicar el triángulo de Pascal para desarrollar $(3x-2y)^4$

Solución.

Ubicando los coeficientes respectivos se tiene:

$$\begin{aligned}(3x-2y)^4 &= (3x)^4+4(3x)^3(-2y)+6(3x)^2(-2y)^2+4(3x)(-2y)^3+(-2y)^4\\ &=81x^4+4(27x^3)(-2y)+6(9x^2)(4y^2)+4(3x)(-8y^3)+16y^4\\ &=81x^4-216x^3y+216x^2y^2-96xy^3+16y^4\end{aligned}$$

2) Encontrar la expansión de $(5a^4+4b^3)^6$ aplicando el triángulo de Pascal.

Solución.

Ubicando los coeficientes respectivos se tiene:

$$\begin{aligned}(5a^4+4b^3)^6 &= (5a^4)^6+6(5a^4)^5(4b^3)+15(5a^4)^4(4b^3)^2+20(5a^4)^3(4b^3)^3+15(5a^4)^2(4b^3)^4\\ &\quad+6(5a^4)(4b^3)^5+(4b^3)^6\\ &=15{,}625a^{24}+6(3{,}125a^{20})(4b^3)+15(625a^{16})(16b^6)+20(125a^{12})(64b^9)\\ &\quad+15(25a^8)(256b^{12})+6(5a^4)(1{,}024b^{15})+4{,}096b^{18}\\ &=15{,}625a^{24}+75{,}000a^{20}b^3+150{,}000a^{16}b^6+160{,}000a^{12}b^9+96{,}000a^8b^{12}\\ &\quad+30{,}720a^4b^{15}+4{,}096b^{18}\end{aligned}$$

V.2 FACTORIZACIÓN

Un *factor* es cada uno de los números que se multiplican para formar un producto.

Ejemplo.

Sean los siguientes productos:

$(3)(2)=6$, por lo que factores de 6 son 3 y 2.

$(5)(2)=10$, por lo que factores de 10 son 5 y 2.

$(5)(3)(2)=30$, por lo que factores de 30 son 5, 3 y 2.

Nótese como el número 2 aparece como factor común de 6, 10 y 30 porque cada uno de estos números se divide exactamente entre dicho factor común.

Cuando una expresión algebraica está contenida exactamente en todos y cada uno de los términos de un polinomio, se dice que es factor común de ellos.

Ejemplos.

1) El término $3x^2$ es factor común de $6x^4y$, de $9x^3$ y de $-12x^2y^2$ porque cada monomio puede expresarse como el producto de $3x^2$ por otro término, es decir:

$6x^4y=(3x^2)(2x^2y)$

$9x^3=(3x^2)(3x)$

$-12x^2y^2=(3x^2)(-4y^2)$

2) El término $4ab^2$ es factor común de $28a^2b^3$, de $-20a^3b^2$ y de $8ab^3$ porque cada monomio puede expresarse como el producto de $4ab^2$ por otro término, es decir:

$$28a^2b^3=\left(4ab^2\right)(7ab)$$
$$-20a^3b^2=\left(4ab^2\right)\left(-5a^2\right)$$
$$8ab^3=\left(4ab^2\right)(2b)$$

Factorizar es el proceso que permite descomponer en factores una expresión matemática. Esto significa que factorizar es convertir una expresión en el producto indicado de sus factores.

En toda expresión debe obtenerse la máxima factorización posible. Los tipos de factorización más utilizados se exponen a continuación.

V.2.1 MONOMIO COMO FACTOR COMÚN

Para encontrar el factor común de los términos de un polinomio se busca el máximo común divisor (MCD) de los coeficientes de *todos* los términos, y de las literales que aparezcan en *todos* los términos, se escogen las que tengan el menor exponente.

Ejemplos.
Factorizar los siguientes polinomios.

1) $4a^3b+10a^2b^2$

El MCD de los coeficientes es 2, y las literales de menor exponente que aparecen en todos los términos son: a^2 y b, por lo que el factor común es: $2a^2b$

Así que: $4a^3b+10a^2b^2=2a^2b(2a+5b)$

2) $6x^5y^3z+18x^3y^4z^5-21x^4y^2z^4$

El MCD de los coeficientes es 3, y las literales de menor exponente que aparecen en todos los términos son: x^3, y^2 y z, por lo que el factor común es: $3x^3y^2z$

Así que: $6x^5y^3z+18x^3y^4z^5-21x^4y^2z^4=3x^3y^2z\left(2x^2y+6y^2z^4-7xz^3\right)$

3) $k^2+km=k(k+m)$

4) $12p^2+3pq=3p(4p+q)$

5) $16x^6-56x^4+24x^2-40x^5+32x^3=8x^2\left(2x^4-7x^2+3-5x^3+4x\right)$

6) $49k^4m^3+70k^5m^6-63k^3m^8+14k^4m^5-91k^2m^9=7k^2m^3\left(7k^2+10k^3m^3-9km^5+2k^2m^2-13m^6\right)$

7) $\frac{3}{2}e^2f^4+\frac{15}{2}e^4f^3=\frac{3}{2}e^2f^3\left(f+5e^2\right)$

8) $22\alpha^3\beta^6\lambda^7-44\alpha^4\lambda^5-66\alpha^2\beta^2\lambda^4+55\alpha^4\lambda^6=11\alpha^2\lambda^4\left(2\alpha\beta^6\lambda^3-4\alpha^2\lambda-6\beta^2+5\alpha^2\lambda^2\right)$

Nótese como no aparece en el factor común la literal β ya que no está en todos los términos del polinomio.

V.2.2 POLINOMIO COMO FACTOR COMÚN

En una expresión, cuando el máximo común divisor (MCD) de *todos* los términos es un polinomio entonces se puede descomponer como el producto de este factor común por un polinomio cuyo resultado sea la expresión original, tal y como se muestra a continuación.

Ejemplos.
Factorizar las siguientes expresiones.

1) $5(a+b)+k(a+b)$
El MCD de los todos los términos es: $(a+b)$
Así que: $5(a+b)+k(a+b)=(a+b)(5+k)$
2) $6r(m-3n)-8q(m-3n)+11s(m-3n)$
El MCD de los todos los términos es: $(m-3n)$
Así que: $6r(m-3n)-8q(m-3n)+11s(m-3n)=(m-3n)(6r-8q+11s)$
3) $w(x+3y-2z)-x-3y+2z+4p(x+3y-2z)$
Esta expresión puede rescribirse como:
$w(x+3y-2z)-1(x+3y-2z)+4p(x+3y-2z)$
por lo que el MCD de los todos los términos es: $(x+3y-2z)$
Así que: $w(x+3y-2z)-x-3y+2z+4p(x+3y-2z)=(x+3y-2z)(w-1+4p)$
4) $a^2(4a-3)^2+a(3-4a)^3$
Esta expresión puede rescribirse como:
$a^2(4a-3)^2-a(4a-3)^3$
El MCD de los todos los términos es: $a(4a-3)^2$
Así que: $a^2(4a-3)^2-a(4a-3)^3=a(4a-3)^2[a-(4a-3)]=a(4a-3)^2(3-3a)=3a(4a-3)^2(1-a)$
5) $9z^2(4e+7f)+4e+7f=(4e+7f)(9z^2+1)$
6) $10u(2c-d^3)+4c-2d^3=10u(2c-d^3)+2(2c-d^3)=(2c-d^3)(10u+2)=2(2c-d^3)(5u+1)$
7) $(x-b)(w+3)-8(w+3)+(c-y)(w+3)=(w+3)(x-b-8+c-y)$
8) $\frac{8c^2}{3}(a^2-a+1)+\frac{4b}{3}(a^2-a+1)=\frac{4}{3}(a^2-a+1)(2c^2+b)$

V.2.3 FACTORIZACIÓN POR AGRUPACIÓN DE TÉRMINOS

Existen polinomios cuyos términos no contienen un mismo factor común. En esos casos, se debe factorizar por agrupación, procedimiento que combina los dos métodos anteriores.

Ejemplos.
Factorizar los siguientes polinomios:

1) $ax+bx+aw+bw$
Para los primeros dos términos se toma como factor común a x y para los otros dos a w:
$x(a+b)+w(a+b)$
ahora, se factoriza el polinomio $(a+b)$:
$(a+b)(x+w)$
$\therefore \quad ax+bx+aw+bw=(a+b)(x+w)$
2) $ax+ay+4x+4y$
El factor común para los primeros dos términos es a y para los otros dos es 4:
$a(x+y)+4(x+y)$
después, se factoriza el polinomio $(x+y)$:

$(x+y)(a+4)$

$\therefore \quad ax+ay+4x+4y=(x+y)(a+4)$

3) $10px-15py+6xy-9y^2$

Para los primeros dos términos se toma como factor común a $5p$ y para los otros dos a $3y$:

$5p(2x-3y)+3y(2x-3y)$

ahora, se factoriza el polinomio $(2x-3y)$:

$(2x-3y)(5p+3y)$

$\therefore \quad 10px-15py+6xy-9y^2=(2x-3y)(5p+3y)$

4) $8ac-4ad-6bc+3bd$

El factor común para los primeros dos términos es $4a$ y para los otros dos es $-3b$:

$4a(2c-d)-3b(2c-d)$

después, se factoriza el polinomio $(2c-d)$:

$(2c-d)(4a-3b)$

$\therefore \quad 8ac-4ad-6bc+3bd=(2c-d)(4a-3b)$

5) $3a^2+10a+3$

Esta expresión puede rescribirse como: $3a^2+9a+a+3$

El factor común para los primeros dos términos es $3a$:

$3a(a+3)+a+3$

$\therefore \quad 3a^2+10a+3=(a+3)(3a+1)$

6) $5x^4y+3x^2y-9xz-15x^3z=x^2y(5x^2+3)-3xz(3+5x^2)=(5x^2+3)(x^2y-3xz)=x(5x^2+3)(xy-3z)$

7) $3abx^2-2y^2-2x^2+3aby^2=3abx^2-2x^2+3aby^2-2y^2=x^2(3ab-2)+y^2(3ab-2)$
$=(3ab-2)(x^2+y^2)$

8) $2ab+2a-b-2ac+c-1=2ab-b-2ac+c+2a-1=b(2a-1)-c(2a-1)+(2a-1)$
$=(2a-1)(b-c+1)$

Otra forma de resolver este ejercicio es escribirlo como $2ab-2ac+2c-b+c-1$:

$2ab-2ac+2a-(b-c+1)=2a(b-c+1)-(b-c+1)=(b-c+1)(2a-1)$

V.2.4 FACTORIZACIÓN DE UN TRINOMIO CUADRADO PERFECTO

Una cantidad es *cuadrado perfecto* cuando es el producto de dos factores iguales, es decir, es el cuadrado de otra cantidad. Por ejemplo, $9a^2$ es cuadrado perfecto, ya que es el cuadrado de $3a$.

Se conoce como *trinomio cuadrado perfecto* (TCP) al resultado que se obtiene de elevar al cuadrado un binomio:

$$\underbrace{(a+b)^2}_{\substack{\text{Cuadrado}\\ \text{de un}\\ \text{binomio}}}=\underbrace{a^2+2ab+b^2}_{\substack{\text{Trinomio Cuadrado}\\ \text{Perfecto}}}$$

Para identificar si un trinomio es cuadrado perfecto, se debe cumplir que dos de sus términos sean cuadrados perfectos y que el otro término corresponda al doble producto de las raíces cuadradas de los términos cuadráticos.

Ejemplos.
Determinar si los siguientes trinomios son cuadrados perfectos.

1) $16x^2 + 40xy + 25y^2$
Primero se comprueba que dos términos sean cuadrados perfectos:
$\sqrt{16x^2} = 4x$
$\sqrt{25y^2} = 5y$
el doble producto de las raíces cuadradas debe ser igual al otro término:
$2(4x)(5y) = 40xy$
por lo tanto el trinomio, es un TCP.
2) $36a^2 + 96ab^2 + 64b^4$
Comprueba que dos términos sean cuadrados perfectos:
$\sqrt{36a^2} = 6a$
$\sqrt{64b^4} = 8b^2$
el doble producto de las raíces cuadradas debe ser igual al otro término:
$2(6a)(8b^2) = 96ab^2$
por lo tanto, el trinomio es un TCP.
3) $4k^2 + 10km + 9m^2$
Primero se comprueba que dos términos sean cuadrados perfectos:
$\sqrt{4k^2} = 2k$
$\sqrt{9m^2} = 3m$
el doble producto de las raíces cuadradas debe ser igual al otro término:
$2(2k)(3m) = 12km \neq 10km$
por lo tanto el trinomio no es un TCP.

Para factorizar un trinomio cuadrado perfecto se extrae la raíz cuadrada de los términos que son cuadrados perfectos, se separan por el signo que tiene el término que no lo es y finalmente se eleva el binomio al cuadrado.

Ejemplos.
Factorizar los siguientes TCP:

1) $x^2 + 14x + 49$
Se extraen las raíces de los términos cuadrados perfectos:
$\sqrt{x^2} = x$
$\sqrt{49} = 7$
se separan por el signo del otro término $(+)$ y el binomio se eleva al cuadrado: $(x+7)^2$
$\therefore \quad x^2 + 14x + 49 = (x+7)^2$
2) $a^2 - 4ab + 4b^2$
Extrayendo las raíces de los términos cuadrados perfectos:
$\sqrt{a^2} = a$
$\sqrt{4b^2} = 2b$
se separan por el signo del otro término $(-)$ y el binomio se eleva al cuadrado: $(a-2b)^2$
$\therefore \quad a^2 - 4ab + 4b^2 = (a-2b)^2$

3) $81p^6 - 180p^3q^2 + 100q^4$
Se extraen las raíces de los términos cuadrados perfectos:
$\sqrt{81p^6} = 9p^3$
$\sqrt{100q^4} = 10q^2$
se separan por el signo del otro término $(-)$ y el binomio se eleva al cuadrado: $(9p^3 - 10q^2)^2$
$\therefore \quad 81p^6 - 180p^3q^2 + 100q^4 = (9p^3 - 10q^2)^2$
4) $36a^2 + 84ab + 49b^2 = (6a + 7b)^2$
5) $9x^2 - 30xy + 25y^2 = (3x - 5y)^2$
6) $100w^8 - 100w^4z^6 + 25z^{12} = (10w^4 - 5z^6)^2$
7) $\frac{4}{9}e^2 + \frac{16}{39}ef + \frac{16}{169}f^2 = \left(\frac{2}{3}e + \frac{4}{13}f\right)^2$
8) $9w^2t^{12} + 4n^6r^4 - 12n^3r^2wt^6 = 4n^6r^4 - 12n^3r^2wt^6 + 9w^2t^{12} = (2n^3r^2 - 3wt^6)^2$

Operación: *Completar un trinomio cuadrado perfecto*

Ejemplos.
Completar los siguientes TCP:

1) $x^2 + \_\_\_ + 9$
Se extraen las raíces de los términos cuadrados perfectos:
$\sqrt{x^2} = x$
$\sqrt{9} = 3$
se multiplican estos dos términos y se duplica el resultado: $2(x)(3) = 6x$
por lo tanto el TCP completo es: $x^2 + 6x + 9$
2) $16c^2 + \_\_\_ + 25d^2$
Las raíces de los términos cuadrados perfectos son:
$\sqrt{16c^2} = 4c$
$\sqrt{25d^2} = 5d$
se multiplican estos dos términos y se duplica el resultado: $2(4c)(5d) = 40cd$
por lo tanto el TCP completo es: $16c^2 + 40cd + 25d^2$
3) $144\alpha^4 - \_\_\_ + 49\beta^6$
Extrayendo las raíces de los términos cuadrados perfectos:
$\sqrt{144\alpha^4} = 12\alpha^2$
$\sqrt{49\beta^6} = 7\beta^3$
se multiplican estos dos términos y se duplica el resultado: $2(12\alpha^2)(7\beta^3) = 168\alpha^2\beta^3$
por lo tanto el TCP completo es: $144\alpha^4 - 168\alpha^2\beta^3 + 49\beta^6$
4) $x^2 + 16x + \_\_\_$
Se extrae la raíz del término cuadrado perfecto: $\sqrt{x^2} = x$

se divide el otro término entre la raíz obtenida: $\frac{16x}{x}=16$

este resultado se divide por dos $\frac{16}{2}=8$ y, finalmente, se eleva al cuadrado: $8^2=64$

por lo tanto el TCP completo es: $x^2+16x+64$

5) $36a^2+48ab^2+$ ___

La raíz del término cuadrado perfecto es: $\sqrt{36a^2}=6a$

se divide el otro término entre la raíz obtenida: $\frac{48ab^2}{6a}=8b^2$

este resultado se divide por dos $\frac{8b^2}{2}=4b^2$ y, finalmente, se eleva al cuadrado: $\left(4b^2\right)^2=16b^4$

por lo tanto el TCP completo es: $36a^2+48ab^2+16b^4$

6) $144g^{10}+312g^5h^4+$ ___

Extrayendo la raíz del término cuadrado perfecto: $\sqrt{144g^{10}}=12g^5$

se divide el otro término entre la raíz obtenida: $\frac{312g^5h^4}{12g^5}=26h^4$

este resultado se divide por dos $\frac{26h^4}{2}=13h^4$ y, finalmente, se eleva al cuadrado: $\left(13h^4\right)^2=169h^8$

por lo tanto el TCP completo es: $144g^{10}+312g^5h^4+169h^8$

V.2.5 FACTORIZACIÓN DE UNA DIFERENCIA DE CUADRADOS

Una diferencia de cuadrados es el resultado del producto de dos binomios conjugados:

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

Esto implica que para factorizar una diferencia de cuadrados, se extraen las raíces cuadradas de los términos y se forma un binomio. Finalmente se expresa el producto de este binomio por su conjugado.

Ejemplos.
Factorizar las siguientes expresiones:

1) x^2-4
Se extraen las raíces de los términos:
$\sqrt{x^2}=x$
$\sqrt{4}=2$
se forma el binomio: $(x+2)$ y se multiplica por su conjugado:
$(x+2)(x-2)$
por lo que: $x^2-4=(x+2)(x-2)$
2) $25a^2-16b^4$
Las raíces de los términos son:
$\sqrt{25a^2}=5a$

$\sqrt{16b^4} = 4b^2$

se forma el binomio: $\left(5a + 4b^2\right)$ y se multiplica por su conjugado:

$\left(5a + 4b^2\right)\left(5a - 4b^2\right)$

así que: $25a^2 - 16b^4 = \left(5a + 4b^2\right)\left(5a - 4b^2\right)$

3) $100k^2 - 64m^2 = (10k + 8m)(10k - 8m)$

4) $144n^6 - 9r^8 = \left(12n^3 + 3r^4\right)\left(12n^3 - 3r^4\right)$

5) $49t^{10} - 625p^{12} = \left(7t^5 + 25p^6\right)\left(7t^5 - 25p^6\right)$

6) $400e^{14}f^{16} - 256g^{12}h^{18} = \left(20e^7f^8 + 16g^6h^9\right)\left(20e^7f^8 - 16g^6h^9\right)$

7) $\frac{1}{4}a^2 - \frac{36}{121}b^2 = \left(\frac{1}{2}a + \frac{6}{11}b\right)\left(\frac{1}{2}a - \frac{6}{11}b\right)$

8) $(3z-1)^3 + w^2(1-3z) = (3z-1)^3 - w^2(3z-1) = w^2(3z-1)\left[(3z-1)^2 - w^2\right]$
$= (3z-1)[(3z-1)+w][(3z-1)-w] = (3z-1)(3z-1+w)(3z-1-w)$

V.2.6 FACTORIZACIÓN DE UN TRINOMIO DE LA FORMA $x^n + bx^{\frac{n}{2}} + c$

Para factorizar un trinomio de la forma $x^n + bx^{\frac{n}{2}} + c$, donde x^n es un cuadrado perfecto y n natural par, se expresa como producto de dos binomios cuyo primer término para ambos sea la raíz cuadrada de x^n, es decir, $x^{\frac{n}{2}}$. Por su parte, los términos no comunes de este producto de binomios deben cumplir con la doble condición de que su suma sea igual al coeficiente b y su producto igual al coeficiente c.

En general:

- Si el término c es positivo entonces los dos números buscados tienen el mismo signo. Si b es positivo los números son positivos. Si b es negativo los números son negativos.
- Si el término c es negativo entonces los números buscados tienen signos contrarios y el signo del número más grande es el mismo que el del coeficiente b.

Ejemplos.
Factorizar los siguientes trinomios:

1) $x^2 + 7x + 10$

La raíz del primer término es: $\sqrt{x^2} = x$

el término c es positivo y b también lo es, por lo que los dos números buscados que sumados sean 7 y multiplicados sea 10 son positivos. Estos números son 5 y 2.

Por lo tanto: $x^2 + 7x + 10 = (x+5)(x+2)$

2) $x^2 - 11x + 24$

La raíz del primer término es: $\sqrt{x^2} = x$

el término c es positivo y b es negativo, por lo que los dos números buscados que sumados sean -11 y multiplicados sea 24 son negativos. Estos números son -8 y -3.

Por lo tanto: $x^2 - 11x + 24 = (x-8)(x-3)$

3) $k^4 + 3k^2 - 28$

La raíz del primer término es: $\sqrt{k^4} = k^2$

el término c es negativo y b es positivo, por lo que los dos números buscados que sumados sean 3 y multiplicados sea -28 tienen signos contarios y el más grande es positivo. Estos números son 7 y -4.

Por lo tanto: $k^4 + 3k^2 - 28 = (k^2 + 7)(k^2 - 4)$

4) $z^6 - 2z^3 - 15$

La raíz del primer término es: $\sqrt{z^6} = z^3$

el término c es negativo y b también lo es, por lo que los dos números buscados que sumados sean -2 y multiplicados sea -15 tienen signos contarios y el más grande es negativo. Estos números son -5 y 3.

Por lo tanto: $z^6 - 2z^3 - 15 = (z^3 - 5)(z^3 + 3)$

5) $w^8 + 9w^4 + 20 = (w^4 + 5)(w^4 + 4)$

6) $m^{10} - 13m^5 + 36 = (m^5 - 9)(m^5 - 4)$

7) $x^4 + 17x^2 - 60 = (x^2 + 20)(x^2 - 3)$

8) $n^{12} - 10n^6 - 75 = (n^6 - 15)(n^6 + 5)$

9) $9x^2 + 6x - 8 = (3x)^2 + 2(3x) - 8 = (3x + 4)(3x - 2)$

10) $4a^6 + 8a^3 - 5 = (2a^3)^2 + 4(2a^3) - 5 = (2a^3 + 5)(2a^3 - 1)$

V.2.7 FACTORIZACIÓN DE UN TRINOMIO DE LA FORMA $ax^2 + bx + c$

Para factorizar un trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$, se efectúa el siguiente procedimiento[1]:

- Se multiplican todos los términos por el coeficiente a
- Se expresa el primer término en forma de cuadrado y para el segundo término se intercambia el coeficiente a por b
- Se factoriza aplicando el caso anterior
- Se divide el resultado entre a de forma tal que no quede ningún cociente.

Ejemplos.
Factorizar los siguientes trinomios:

1) $6x^2 + 7x + 2$

Multiplicando los términos del trinomio por 6: $6(6x^2) + 6(7x) + 6(2)$

expresando el primer término en forma de cuadrado y para el segundo término se intercambia el coeficiente 6 por el 7: $(6x)^2 + 7(6x) + 12$

aplicando el caso anterior de factorización se buscan dos números que sumados sean 7 y multiplicados sean 12 se tiene: $(6x + 4)(6x + 3)$

se divide por 6 de forma que no queden cocientes: $\frac{(6x+4)(6x+3)}{6} = \frac{(6x+4)}{2}\frac{(6x+3)}{3} = (3x + 2)(2x + 1)$

por lo tanto: $6x^2 + 7x + 2 = (3x + 2)(2x + 1)$

---

[1] Generalmente a no es cuadrado perfecto y aún siéndolo no es de la forma $x^n + bx^{\frac{n}{2}} + c$ porque b no es entero.

2) $2x^2+3x-2$

Multiplicando los términos del trinomio por 2: $2\left(2x^2\right)+2(3x)-2(2)$

expresando el primer término en forma de cuadrado y para el segundo término se intercambia el coeficiente 3 por el 2: $(2x)^2+3(2x)-4$

aplicando el caso anterior de factorización se buscan dos números que sumados sean 3 y multiplicados sean -4 se tiene: $(2x+4)(2x-1)$

se divide por 2 de forma que no queden cocientes: $\frac{(2x+4)(2x-1)}{2}=\frac{(2x+4)}{2}\frac{(2x-1)}{1}=(x+2)(2x-1)$

por lo tanto: $2x^2+3x-2=(x+2)(2x-1)$

3) $5k^4-13k^2-6$

Multiplicando los términos del trinomio por 5: $5\left(5k^4\right)-5\left(13k^2\right)-5(6)$

expresando el primer término en forma de cuadrado y para el segundo término se intercambia el coeficiente 5 por el 13: $\left(5k^2\right)^2-13\left(5k^2\right)-30$

aplicando el caso anterior de factorización se buscan dos números que sumados sean -13 y multiplicados sean -30 se tiene: $\left(5k^2-15\right)\left(5k^2+2\right)$

se divide por 5 de forma que no queden cocientes:

$$\frac{\left(5k^2-15\right)\left(5k^2+2\right)}{5}=\frac{\left(5k^2-15\right)}{5}\frac{\left(5k^2+2\right)}{1}=\left(k^2-3\right)\left(5k^2+2\right)$$

por lo tanto: $5k^4-13k^2-6=\left(k^2-3\right)\left(5k^2+2\right)$

4) $4q^6-15q^3+9$

$$4\left(4q^6\right)-4\left(15q^3\right)+4(9)=\left(4q^3\right)^2-15\left(4q^3\right)+36=\left(4q^3-12\right)\left(4q^3-3\right)$$

$$\frac{\left(4q^3-12\right)}{4}\frac{\left(4q^3-3\right)}{1}=\left(q^3-3\right)\left(4q^3-3\right)$$

$$\therefore \quad 4q^6-15q^3+9=\left(q^3-3\right)\left(4q^3-3\right)$$

5) $8x^2-14x-15$

$$8\left(8x^2\right)-8(14x)-8(15)=(8x)^2-14(8x)-120=(8x-20)(8x+6)$$

$$\frac{(8x-20)}{4}\frac{(8x+6)}{2}=(2x-5)(4x+3)$$

$$\therefore \quad 8x^2-14x-15=(2x-5)(4x+3)$$

6) $9\alpha^8+10\alpha^4+1$

$$9\left(9\alpha^8\right)+9\left(10\alpha^4\right)+9(1)=\left(9\alpha^4\right)^2+10\left(9\alpha^4\right)+9=\left(9\alpha^4+9\right)\left(9\alpha^4+1\right)$$

$$\frac{\left(9\alpha^4+9\right)}{9}\frac{\left(9\alpha^4+1\right)}{1}=\left(\alpha^4+1\right)\left(9\alpha^4+1\right)$$

$$\therefore \quad 9\alpha^8+10\alpha^4+1=\left(\alpha^4+1\right)\left(9\alpha^4+1\right)$$

7) $4y^2+y-33$

$$4\left(4y^2\right)+4(y)-4(33)=(4y)^2+1(4y)-132=(4y+12)(4y-11)$$

$$\frac{(4y+12)}{4}\frac{(4y-11)}{1}=(y+3)(4y-11)$$

$$\therefore \quad 4y^2+y-33=(y+3)(4y-11)$$

8) $7z^{10}+46z^5+24$

$$7(7z^{10})+7(46z^5)+7(24)=(7z^5)^2+46(7z^5)+168=(7z^5+42)(7z^5+4)$$

$$\frac{(7z^5+42)}{7}\frac{(7z^5+4)}{1}=(z^5+6)(7z^5+4)$$

$$\therefore \quad 7z^{10}+46z^5+24=(z^5+6)(7z^5+4)$$

V.2.8 FACTORIZACIÓN DEL CUBO DE UN BINOMIO

Una cantidad es *cubo perfecto* cuando es el producto de tres factores iguales, es decir, es el cubo de otra cantidad.

Por ejemplo, $125k^3$ es cubo perfecto, ya que es el cubo de $5k$.

El cubo de un binomio es de la forma:

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

y cumple con las siguientes características:

- Posee cuatro términos.
- El primero como el último término son cubos perfectos
- El segundo término es el triple producto del cuadrado de la raíz cúbica del primer término por la raíz cúbica del último.
- El tercer término es el triple producto de la raíz cúbica del primer término por el cuadrado de la raíz cúbica del último.

Para verificar que la factorización de una expresión de cuatro términos es el cubo de un binomio se debe proceder de la siguiente manera:

1. Se ordena el polinomio en forma descendente o ascendente respecto a una literal.
2. Se extrae la raíz cúbica del primer y último términos del polinomio.
3. Se observa si todos los signos son iguales o si se alternan.
4. Se triplica el cuadrado de la raíz cúbica del primer término por la raíz cúbica del último y se compara con el segundo término del polinomio dado.
5. Se triplica la raíz cúbica del primer término por el cuadrado de la raíz cúbica del último y se compara con el tercer término de la expresión.
6. Si las dos comparaciones hechas en los pasos previos son iguales, se trata del desarrollo del cubo de un binomio y se factoriza así: se forma un binomio con las raíces cúbicas del primer y último término del polinomio, con los signos que se obtengan (si todos los signos son iguales) o por el signo menos (si los signos se alternan). Finalmente, se eleva el binomio al cubo.

Ejemplos.
Factorizar los siguientes polinomios:

1) k^3+3k^2+3k+1
Se extraen las raíces cúbicas de los términos extremos:

$$\sqrt[3]{k^3}=k$$

$\sqrt[3]{1} = 1$

El triple producto del cuadrado de la raíz cúbica del primer término por la raíz cúbica del último es: $3(k)^2(1) = 3k^2$, que es igual al segundo término.

El triple producto de la raíz cúbica del primer término por el cuadrado de la raíz cúbica del último es: $3(k)(1)^2 = 3k$, que es igual al tercer término.

Dado que todos los signos son positivos, el binomio al cubo formado por las raíces cúbicas de los extremos es: $(k+1)^3$, así que: $k^3 + 3k^2 + 3k + 1 = (k+1)^3$

2) $27 - 27x + 9x^2 - x^3$

Se extraen las raíces cúbicas de los términos extremos:

$\sqrt[3]{27} = 3$

$\sqrt[3]{-x^3} = -x$

El triple producto del cuadrado de la raíz cúbica del primer término por la raíz cúbica del último es: $3(3)^2(-x) = -27x$, que es igual al segundo término.

El triple producto de la raíz cúbica del primer término por el cuadrado de la raíz cúbica del último es: $3(3)(-x)^2 = 9x^2$, que es igual al tercer término.

Dado que los signos se alternan, el binomio al cubo formado por las raíces cúbicas de los extremos es: $(3-x)^3$, así que: $27 - 27x + 9x^2 - x^3 = (3-x)^3$

3) $3mn^2 + m^3 + n^3 + 3m^2n$

Se ordena el polinomio con respecto a m:

$m^3 + 3m^2n + 3mn^2 + n^3$

se extraen las raíces cúbicas de los términos extremos:

$\sqrt[3]{m^3} = m$

$\sqrt[3]{n^3} = n$

El triple producto del cuadrado de la raíz cúbica del primer término por la raíz cúbica del último es: $3(m)^2(n) = 3m^2n$, que es igual al segundo término.

El triple producto de la raíz cúbica del primer término por el cuadrado de la raíz cúbica del último es: $3(m)(n)^2 = 3mn^2$, que es igual al tercer término.

Dado que todos los signos son positivos, el binomio al cubo formado por las raíces cúbicas de los extremos es: $(m+n)^3$, así que: $m^3 + 3m^2n + 3mn^2 + n^3 = (m+n)^3$

4) $8q^9 - p^6 + 6q^3p^4 - 12q^6p^2$

Se ordena el polinomio con respecto a q:

$8q^9 - 12q^6p^2 + 6q^3p^4 - p^6$

se extraen las raíces cúbicas de los términos extremos:

$\sqrt[3]{8q^9} = 2q^3$

$\sqrt[3]{-p^6} = -p^2$

El triple producto del cuadrado de la raíz cúbica del primer término por la raíz cúbica del último es: $3(2q^3)^2(-p^2) = -12q^6p^2$, que es igual al segundo término.

El triple producto de la raíz cúbica del primer término por el cuadrado de la raíz cúbica del último es: $3(2q^3)(-p^2)^2 = 6q^3p^4$, que es igual al tercer término.

Dado que los signos se alternan, el binomio al cubo formado por las raíces cúbicas de los extremos es: $\left(2q^3 - p^2\right)^3$, así que: $8q^9 - 12q^6p^2 + 6q^3p^4 - p^6 = \left(2q^3 - p^2\right)^3$

5) $125x^3 + 1 + 75x^2 + 15x = 125x^3 + 75x^2 + 15x + 1 = (5x+1)^3$

6) $8 + 6w^4 - w^6 - 12w^2 = 8 - 12w^2 + 6w^4 - w^6 = \left(2 - w^2\right)^3$

7) $64x^9 - 125y^{12} - 240x^6y^4 + 300x^3y^8 = 64x^9 - 240x^6y^4 + 300x^3y^8 - 125y^{12} = \left(4x^3 - 5y^4\right)^3$

8) $18a^2b^3 + 1 + +216a^6b^9 + 108a^4b^6 = 216a^6b^9 + 108a^4b^6 + 18a^2b^3 + 1 = \left(6a^2b^3 + 1\right)^3$

V.2.9 FACTORIZACIÓN DE LA SUMA O DIFERENCIA DE DOS POTENCIAS IGUALES

Sea n un número entero positivo.

- La *suma* de potencias iguales *impares* es siempre divisible por la suma de las bases. Esto es: $a^n + b^n$ es divisible por $a+b$. Por lo tanto: $a^n + b^n = (a+b)\left(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \cdots + b^{n-1}\right)$

- La *suma* de potencias iguales *pares*, no es divisible ni por la suma ni por la diferencia de las bases a menos de que sea posible transformarla en una suma equivalente de potencias impares.

- La *diferencia* de potencias iguales, sean *pares* o *impares*, es siempre divisible por la diferencia de las bases. Esto es: $a^n - b^n$ es divisible por $a-b$. Por lo tanto: $a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + b^{n-1}\right)$

- La *diferencia* de potencias iguales pares, es siempre divisible por la suma de las bases. Esto es: $a^n - b^n$ es divisible por $a+b$. Por lo tanto: $a^n - b^n = (a+b)\left(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \cdots + b^{n-1}\right)$

Ejemplos.
Factorizar las siguientes sumas de potencias iguales:

1) $a^3 + b^3$
Solución.
Las potencias son impares, entonces es divisible por $a+b$:

$$
\begin{array}{r|llll}
 & a^2 - ab + b^2 & & & \\
\hline
a+b & a^3 & & & +b^3 \\
 & -a^3 - a^2b & & & \\
\cline{2-5}
 & & -a^2b & & +b^3 \\
 & & a^2b + ab^2 & & \\
\cline{3-5}
 & & & ab^2 & +b^3 \\
 & & & -ab^2 & -b^3 \\
\cline{4-5}
 & & & & 0
\end{array}
$$

Por lo tanto: $a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right)$

2) $k^5 + 32$
Solución.

$k^5+32=k^5+2^5$, las potencias son impares, entonces es divisible por $k+2$:

$$
\begin{array}{r|l}
 & k^4-2k^3+4k^2-8k+16 \\
\hline
k+2 & k^5 \qquad\qquad\qquad\qquad +32 \\
 & \underline{-k^5-2k^4} \\
 & -2k^4 \qquad\qquad\quad +32 \\
 & \underline{2k^4+4k^3} \\
 & 4k^3 \qquad\quad +32 \\
 & \underline{-4k^3-8k^2} \\
 & -8k^2 \quad +32 \\
 & \underline{8k^2+16k} \\
 & 16k+32 \\
 & \underline{-16k-32} \\
 & 0
\end{array}
$$

Por lo tanto: $k^5+32=(k+2)(k^4-2k^3+4k^2-8k+16)$

3) a^3-b^3
Solución.
La expresión es divisible por $a-b$:

$$
\begin{array}{r|l}
 & a^2+ab+b^2 \\
\hline
a-b & a^3 \qquad\qquad -b^3 \\
 & \underline{-a^3+a^2b} \\
 & a^2b \qquad -b^3 \\
 & \underline{-a^2b+ab^2} \\
 & ab^2-b^3 \\
 & \underline{-ab^2+b^3} \\
 & 0
\end{array}
$$

Por lo tanto: $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

4) x^6+729
Solución:
$x^6+729=x^6+3^6$, las potencias son pares, entonces no es divisible por $x+3$ ni por $x-3$.
Sin embargo, x^6+729 equivale a $(x^2)^3+(3^2)^3$, expresión que es factorizable ya que:

$$
\begin{array}{r|l}
 & (x^2)^2 - 9(x^2)^1 + 9^2 \\
\hline
x^2+9 & (x^2)^3 \qquad\qquad\qquad + 9^3 \\
 & -(x^2)^3 - 9(x^2)^2 \\
\cline{2-2}
 & \quad -9(x^2)^2 \qquad\quad + 9^3 \\
 & \quad 9(x^2)^2 + 9^2(x^2) \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad 9^2(x^2) + 9^3 \\
 & \qquad\qquad -9^2(x^2) - 9^3 \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Por lo tanto: $x^6 + 729 = (x^2+9)(x^4 - 9x^2 + 81)$

5) $x^6 - 729$
Solución:
Las potencias son pares, entonces es divisible por $x+3$:

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^5 - 3x^4 + 9x^3 - 27x^2 + 81x - 343 \\
\hline
x+3 & x^6 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -729 \\
 & -x^6 - 3x^5 \\
\cline{2-2}
 & \quad -3x^5 \qquad\qquad\qquad\qquad\quad -729 \\
 & \quad 3x^5 + 9x^4 \\
\cline{2-2}
 & \qquad 9x^4 \qquad\qquad\qquad\quad -729 \\
 & \qquad -9x^4 - 27x^3 \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad -27x^3 \qquad\qquad -729 \\
 & \qquad\qquad 27x^3 + 81x^2 \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad\qquad 81x^2 \qquad -729 \\
 & \qquad\qquad\qquad -81x^2 - 343x \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad\qquad\qquad -343x - 729 \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad 343x + 729 \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Por lo tanto: $x^6 + 729 = (x+3)(x^5 - 3x^4 + 9x^3 - 27x^2 + 81x - 343)$.

La expresión, $x^6 + 729$ también se puede expresar como $(x^3)^2 - (27)^2$, que es una diferencia de cuadrados, por lo tanto, su máxima factorización es: $x^6 + 729 = (x^3 + 27)(x^3 - 27)$ y se puede ver la ventaja sobre el planteamiento anterior para obtener la máxima factorización.

6) $p^4 - q^4$
Solución.
Las potencias son pares, entonces es divisible por $p+q$:

$$
\begin{array}{r|l}
 & p^3 - p^2q + pq^2 - q^3 \\
\hline
p+q & p^4 \qquad\qquad\qquad\qquad -q^4 \\
 & \underline{-p^4 - p^3q} \\
 & \quad -p^3q \qquad\qquad\quad -q^4 \\
 & \quad \underline{p^3q + p^2q^2} \\
 & \qquad\quad p^2q^2 \qquad -q^4 \\
 & \qquad \underline{-p^2q^2 - pq^3} \\
 & \qquad\qquad -pq^3 - q^4 \\
 & \qquad\qquad \underline{pq^3 + q^4} \\
 & \qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Por lo tanto: $p^4 - q^4 = (p+q)(p^3 - p^2q + pq^2 - q^3)$. Factorizando por agrupación se obtiene su máxima factorización: $p^4 - q^4 = (p+q)\left[p^2(p-q) + q^2(p-q)\right] = (p+q)(p-q)(p^2+q^2)$

Este mismo ejercicio pudo hacerse factorizando la diferencia de cuadrados: $p^4 - q^4 = (p^2+q^2)(p^2-q^2)$ y se puede ver la ventaja sobre el planteamiento anterior para obtener la máxima factorización.

7) $x^7 - 128$

Solución.

$x^7 - 128 = x^7 - 2^7$, la expresión es divisible por $x-2$:

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^6 + 2x^5 + 4x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 32x + 64 \\
\hline
x-2 & x^7 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -128 \\
 & \underline{-x^7 + 2x^6} \\
 & \quad 2x^6 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad -128 \\
 & \quad \underline{-2x^6 + 4x^5} \\
 & \qquad 4x^5 \qquad\qquad\qquad\qquad\quad -128 \\
 & \qquad \underline{-4x^5 + 8x^4} \\
 & \qquad\quad 8x^4 \qquad\qquad\qquad\quad -128 \\
 & \qquad\quad \underline{-8x^4 + 16x^3} \\
 & \qquad\qquad 16x^3 \qquad\qquad\quad -128 \\
 & \qquad\qquad \underline{-16x^3 + 32x^2} \\
 & \qquad\qquad\quad 32x^2 \qquad -128 \\
 & \qquad\qquad\quad \underline{-32x^2 + 64x} \\
 & \qquad\qquad\qquad 64x - 128 \\
 & \qquad\qquad\qquad \underline{-64x + 128} \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Por lo tanto: $x^7 - 128 = (x-2)(x^6 + 2x^5 + 4x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 32x + 64)$

V.2.10 MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO DE POLINOMIOS

El *mínimo común múltiplo* (MCM) de dos o más expresiones algebraicas es la expresión algebraica de menor coeficiente numérico y de menor grado que es divisible exactamente por cada una de las expresiones dadas.

Ejemplos.

1) $10k$ es el MCM de $2k$ y de 5
2) $12ab^2$ es el MCM de $3a$ y de $4b^2$
3) $60x^3y^2z^4$ es el MCM de $3xyz^4$, de $5x^3y^2$, de $4z$ y de $2x^2y^2z^3$.

Para obtener el mínimo común múltiplo de monomios se encuentra el MCM de los coeficientes y a continuación se escriben las literales comunes y no comunes, dando a cada literal el mayor exponente que tengan las expresiones dadas.

Ejemplos.
Obtener el mínimo común múltiplo de los siguientes monomios:

1) $4a^3b^2$ y $6ab^4$
el MCM es: $12a^3b^4$
2) $6x^3y^2z$ y $8xy^4z^2$
el MCM es: $24x^3y^4z^2$
3) $5k^2j^2m^3$ y $2kn^5p$
el MCM es: $10k^2j^2m^3n^5p$
4) $8a^3b^2c^3d$ y $12b^6c^4e^2$
el MCM es: $24a^3b^6c^4de^2$
5) $6mn^2$, $5m^2n^3$ y $12m^3n$
el MCM es: $60m^3n^3$
6) $3\alpha^3\beta$, $36\alpha^2\lambda\beta^2$ y $24\delta^2\lambda^4$
el MCM es: $72\alpha^3\beta^2\delta^2\lambda^4$
7) $5pq^2rs^3$, $4p^2r^3$, $3q^2s^2$ y $8p^4r^4s$
el MCM es: $120p^4q^2r^4s^3$
8) $24a^2x^3$, $36a^2y^4$, $12x^2y^5$ y $60a^3y^6$
el MCM es: $360a^3x^3y^6$

Para encontrar el *mínimo común múltiplo de polinomios* primero se factorizan los polinomios dados en sus factores primos y después se multiplican (conservando el MCM en forma factorizada) los factores primos, comunes y no comunes con su mayor exponente.

Ejemplos.
Obtener el mínimo común múltiplo de los siguientes polinomios:
1) $5x+5$ y $10x-10$
Tomando como factor común a 5 para la primera expresión:
$5(x+1)$

Tomando como factor común a 10 para la segunda expresión:

$10(x-1)$

$\therefore$ el MCM es: $10(x+1)(x-1)$

2) $(a-1)^2$ y a^2-1

Factorizando cada una de las expresiones:

$(a-1)^2=(a-1)(a-1)$

$a^2-1=(a+1)(a-1)$

$\therefore$ el MCM es: $(a-1)^2(a+1)$

3) x^3+2x^2y y x^2-4y^2

Tomando como factor común x^2 para la primera expresión:

$x^2(x+2y)$

Factorizando la segunda expresión:

$(x+2y)(x-2y)$

$\therefore$ el MCM es: $x^2(x+2y)(x-2y)$

4) $4by^2-8byz+4bz^2$ y $6c^2y-6c^2z$

Tomando como factor común $4b$ para la primera expresión:

$4b(y^2-2yz+z^2)$

Factorizando el TCP:

$4b(y-z)^2$

Tomando como factor común $6c^2$ para la segunda expresión:

$6c^2(y-z)$

$\therefore$ el MCM es: $12bc^2(y-z)^2$

5) x^2-4, x^2-x-6 y x^2+4x+4

Factorizando cada una de las expresiones:

$x^2-4=(x+2)(x-2)$

$x^2-x-6=(x-3)(x+2)$

$x^2+4x+4=(x+2)^2$

$\therefore$ el MCM es: $(x+2)^2(x-2)(x-3)$

6) k^2+k-2, k^2-4k+3 y $k^2-3k-10$

Factorizando todas las expresiones:

$k^2+k-2=(k+2)(k-1)$

$k^2-4k+3=(k-3)(k-1)$

$k^2-3k-10=(k-5)(k+2)$

$\therefore$ el MCM es: $(k+2)(k-1)(k-3)(k-5)$

7) z^2-25, z^3-125 y $2z+10$

Factorizando las expresiones:

$z^2-25=(z+5)(z-5)$

$z^3 - 125 = (z-5)(z^2 + 5z + 25)$
$2z + 10 = 2(z+5)$
$\therefore$ el MCM es: $2(z+5)(z-5)(z^2+5z+25)$

8) $ax^2 + 5ax - 14a$, $x^3 + 14x^2 + 49x$ y $x^4 + 7x^3 - 18x^2$
Factorizando todas las expresiones:
$ax^2 + 5ax - 14a = a(x^2 + 5x - 14) = a(x+7)(x-2)$
$x^3 + 14x^2 + 49x = x(x^2 + 14x + 49) = x(x+7)^2$
$x^4 + 7x^3 - 18x^2 = x^2(x^2 + 7x - 18) = x^2(x+9)(x-2)$
$\therefore$ el MCM es: $ax^2(x+7)^2(x-2)(x+9)$