

Capítulo 5

Métodos de Interpolación

5.1. Interpolación Lineal

Dados dos puntos (x_k, y_k) y (x_{k+1}, y_{k+1}) , si se desea encontrar un valor de y para una x dada dentro de un intervalo, se utiliza la siguiente ecuación (por triángulos semejantes)

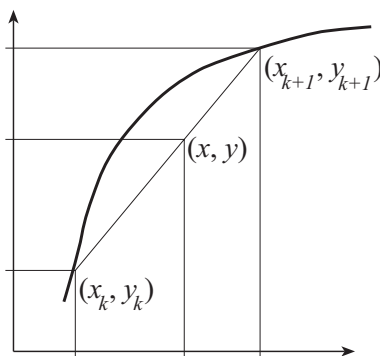


Figura 5.1: Interpolación lineal.

$$\frac{y - y_k}{x - x_k} = \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k} \quad (5.1)$$

y despejando para y , tenemos

$$y = y_k + \left(\frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k} \right) (x - x_k) \quad (5.2)$$

5.2. Polinomio de Interpolación Único

Suponer que se tienen $(n + 1)$ pares de datos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ representando $(n + 1)$ puntos de la gráfica de una función $y = f(x)$, cuya forma explícita no se conoce. Las x_i , $i = 0, \dots, n$ se asumen con valores distintos, es decir, la función es continua.

El polinomio que se va a encontrar debe satisfacer las siguientes restricciones:

$$P_n(x_i) = y_i, \quad i = 0, \dots, n \quad (5.3)$$

asumiendo un polinomio $P_n(x)$ de la forma

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \quad (5.4)$$

Al tener que cumplir con las restricciones (5.3), se generan $(n + 1)$ ecuaciones en $(n + 1)$ incógnitas; siendo éstas los coeficientes a_i 's:

$$\begin{aligned} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + a_3x_0^3 + \cdots + a_nx_0^n &= y_0 \\ a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + a_3x_1^3 + \cdots + a_nx_1^n &= y_1 \\ a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + a_3x_2^3 + \cdots + a_nx_2^n &= y_2 \\ \vdots &= \vdots \\ a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + a_3x_n^3 + \cdots + a_nx_n^n &= y_n \end{aligned} \quad (5.5)$$

y en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ & & \vdots & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

Resolviendo el sistema encontramos los valores del vector $\mathbf{a} = [a_0 \ a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n]^T$.

Ejemplo 5.1

Encontrar el polinomio de interpolación único para los valores:

$$(10, 0.1763), (20, 0.3640) \text{ y } (30, 0.5774)$$

e interpolar el valor $x = 21$.

Solución

$$\begin{aligned} P_2(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 \\ \begin{bmatrix} 1 & 10 & 100 \\ 1 & 20 & 400 \\ 1 & 30 & 900 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0.1763 \\ 0.364 \\ 0.5774 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{a} = \begin{bmatrix} 0.0143 \\ 0.014915 \\ 0.0001285 \end{bmatrix} \\ P_2(x) &= 0.0143 + 0.014915x + 0.0001285x^2 \end{aligned}$$

y evaluando para $x = 21$: $P(21) = 0.3841835$. La figura 5.2 muestra los datos y la función de interpolación.

5.3. Polinomio de Interpolación de Lagrange

Las condiciones que se tienen son las mismas que para el polinomio único; sin embargo, la forma del polinomio cambia:

$$P_n(x) = y_0b_0(x) + y_1b_1(x) + y_2b_2(x) + \cdots + y_nb_n(x) \quad (5.7)$$

donde $b_k(x)$ es un polinomio de grado n . El polinomio $P_n(x)$ cumple con las siguientes restricciones:

$$P_n(x_i) = y_i, \quad i = 0, \dots, n \quad (5.8)$$

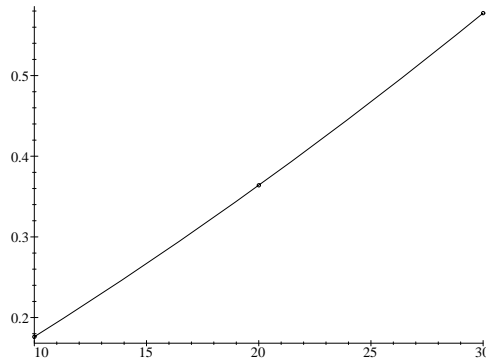


Figura 5.2: Datos de interpolación y función $P_2(x)$ de interpolación

Si desarrollamos el polinomio $P_n(x_i)$, tenemos:

$$y_0 b_0(x_i) + y_1 b_1(x_i) + y_2 b_2(x_i) + \cdots + y_n b_n(x_i) = y_i, \quad i = 0, \dots, n \quad (5.9)$$

generando $(n + 1)$ ecuaciones:

$$\begin{aligned} y_0 b_0(x_0) + y_1 b_1(x_0) + y_2 b_2(x_0) + \cdots + y_n b_n(x_0) &= y_0 \\ y_0 b_0(x_1) + y_1 b_1(x_1) + y_2 b_2(x_1) + \cdots + y_n b_n(x_1) &= y_1 \\ \vdots & \vdots \\ y_0 b_0(x_n) + y_1 b_1(x_n) + y_2 b_2(x_n) + \cdots + y_n b_n(x_n) &= y_n \end{aligned} \quad (5.10)$$

Examinando las ecuaciones, se observa que si los $b_k(x)$ se definen como

$$b_k(x_j) = \delta_{kj} = \begin{cases} 1, & k = j \\ 0, & k \neq j \end{cases}, \quad (5.11)$$

las ecuaciones se logran satisfacer.

Ya que cada $b_k(x)$ es un polinomio de grado n que tiene distintas raíces en $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n$, éste se puede expresar de la siguiente forma:

$$b_k(x) = K_k(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \cdots (x - x_n) \quad (5.12)$$

y las constantes K_k se pueden determinar evaluando $b_k(x)$ en $x = x_k$; ésto es:

$$b_k(x_k) = K_k(x_k - x_0)(x_k - x_1) \cdots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \cdots (x_k - x_n) \quad (5.13)$$

Como sabemos que $b_k(x_k) = 1$ de la ecuación 5.11, esto nos lleva a despejar K_k :

$$K_k = \frac{1}{(x_k - x_0)(x_k - x_1) \cdots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \cdots (x_k - x_n)} \quad (5.14)$$

y sustituyendo en la definición de los $b_k(x)$ (ecuación 5.13), tenemos:

$$b_k(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1})}{(x_k - x_0)(x_k - x_1) \cdots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})} \quad (5.15)$$

y variando $k = 0, \dots, n$ y sustituyendo en la definición del polinomio (ecuación 5.7):

$$P_n(x) = y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \cdots (x_0 - x_n)} +$$

$$\begin{aligned}
& y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_n)} + \cdots + \\
& y_k \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})} + \cdots + \\
& y_n \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{n-2})(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)\cdots(x_n-x_{n-2})(x_n-x_{n-1})}
\end{aligned} \tag{5.16}$$

que es el polinomio clásico de interpolación de Lagrange. Utilizando notación más compacta:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n y_k \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})}. \tag{5.17}$$

Adicionalmente, podemos definir

$$L_k(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1}) \tag{5.18}$$

y así, al evaluarlo en $x = x_k$, tendríamos:

$$L_k(x_k) = (x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1}) \tag{5.19}$$

y el polinomio de Lagrange lo podríamos representar de la siguiente forma:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n y_k \frac{L_k(x)}{L_k(x_k)} \tag{5.20}$$

Ejemplo 5.2

Calcular el polinomio de interpolación de Lagrange para el siguiente conjunto de puntos:

x_i	0	0.33	0.66	1
y_i	1	1.391	1.935	2.718

Solución

Sustituyendo en la ecuación 5.20, se obtiene:

$$\begin{aligned}
P_3(x) &= y_0 \frac{L_0(x)}{L_0(x_0)} + y_1 \frac{L_1(x)}{L_1(x_1)} + y_2 \frac{L_2(x)}{L_2(x_2)} + y_3 \frac{L_3(x)}{L_3(x_3)} \\
&= 1 \frac{(x-0.33)(x-0.66)(x-1)}{(0-0.33)(0-0.66)(0-1)} + \\
&\quad 1.391 \frac{(x-0)(x-0.66)(x-1)}{(0.33-0)(0.33-0.66)(0.33-1)} + \\
&\quad 1.935 \frac{(x-0)(x-0.33)(x-1)}{(0.66-0)(0.66-0.33)(0.66-1)} + \\
&\quad 2.718 \frac{(x-0)(x-0.33)(x-0.66)}{(1-0)(1-0.33)(1-0.66)}
\end{aligned}$$

y simplificando, obtenemos como resultado:

$$\begin{aligned}
P_3(x) &= -4.59137(x-0.33)(x-0.66)(x-1) + \\
&\quad 19.06446x(x-0.66)(x-1) + \\
&\quad -26.13029x(x-0.33)(x-1) + \\
&\quad 11.93152x(x-0.33)(x-0.66) \\
&= 0.27432x^3 + 0.43090x^2 + 1.01278x + 1
\end{aligned}$$

La aproximación es excelente si tomamos en cuenta que los puntos se tomaron de evaluar la función exponencial e^x . En la figura 5.3 podemos observar qué tanto la función evaluada como la aproximación por Lagrange es (para estos puntos) casi la misma.

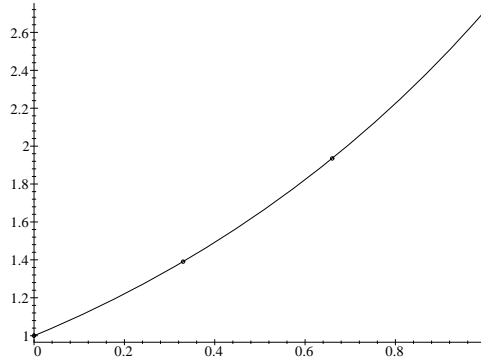


Figura 5.3: Puntos interpolados y polinomio de Lagrange obtenido.

5.4. Polinomio de Interpolación de Newton

El polinomio de interpolación de Newton de forma hacia adelante se puede determinar asumiendo la siguiente forma:

$$P_n(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + c_n(x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}) \quad (5.21)$$

donde los coeficientes c_k , $k = 0, \dots, n$ se determinan al cumplir con las restricciones $P_n(x_i) = y_i$, $i = 0, \dots, n$.

Los coeficientes c_k se pueden calcular en términos de:

- Diferencias finitas hacia adelante
- Diferencias finitas hacia atrás
- Diferencias finitas centradas

5.4.1. Diferencias Hacia Adelante

Considere el conjunto de valores (x_i, y_i) , $i = 0, \dots, n$. Los valores y_i se obtienen de evaluar una función $f(x_i)$. Las diferencias se definen como:

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i, \quad i = 0, \dots, n-1 \quad (5.22)$$

Estas diferencias reciben el nombre de *diferencias de primer orden de $f(x)$* sobre el intervalo (x_0, x_n) . Ahora podemos definir las *diferencias de las diferencias de primer orden*, esto es, *diferencias de segundo orden*, como:

$$\Delta^2 y_i = \Delta(\Delta y_i) = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i, \quad i = 0, \dots, n-2 \quad (5.23)$$

En general, para diferencias de orden k -ésimo, se tiene:

$$\Delta^k y_i = \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i, \quad i = 0, \dots, n-k \quad (5.24)$$

En general, se puede probar que

$$\Delta^k y_0 = y_k - \binom{k}{1} y_{k-1} + \binom{k}{2} y_{k-2} - \cdots + (-1)^k y_0 \quad (5.25)$$

Tabla 5.1: Diferencias hacia adelante

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
		$y_{i+1} - y_i$	$\Delta y_{i+1} - \Delta y_i$	$\Delta^2 y_{i+1} - \Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_{i+1} - \Delta^3 y_i$
x_0	y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$	$\Delta^4 y_0$
x_1	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_1$	\vdots
x_2	y_2	Δy_2	$\Delta^2 y_2$	\vdots	\vdots
x_3	y_3	Δy_3	\vdots	\vdots	\vdots
x_4	y_4	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots

donde

$$\binom{k}{i} = \frac{k!}{i!(k-i)!} \tag{5.26}$$

es la fórmula del coeficiente binomial.

El método asume valores de x_i equidistantemente espaciados, es decir, $(x_j - x_i) = (j - i)h$. De esta forma, se puede sustituir en las ecuaciones generadas (restricciones) para obtener:

$$\begin{aligned} c_0 &= y_0 \\ c_0 + c_1 h &= y_1 \\ c_0 + c_1 2h + c_2 2h^2 &= y_2 \\ &\vdots \\ c_0 + c_1 n h + c_2 n(n-1)h^2 + \dots + c_n n! h^n &= y_n \end{aligned} \tag{5.27}$$

Resolviendo el sistema anterior (sustitución hacia adelante) y utilizando la relación de diferencias hacia adelante de orden k -ésimo, se obtiene:

$$c_0 = y_0, \quad c_1 = \frac{\Delta y_0}{h}, \quad c_2 = \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2}, \quad \dots, \quad c_n = \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n} \tag{5.28}$$

y sustituyendo en el polinomio, obtenemos:

$$\begin{aligned} P_n(x) &= y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \dots + \\ &\quad \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) \end{aligned} \tag{5.29}$$

que aproxima a $y = f(x)$ en el intervalo $[x_0, x_n]$.

Como se puede observar, los coeficientes del polinomio se pudieron obtener directamente de la tabla de diferencias y dividiendo por $k!h^k$.

Ejemplo 5.3

Para los datos proporcionados, calcular el polinomio de interpolación de Newton.

Solución

La tabla de diferencias resultante es

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
0	1	0.39561	0.15651	0.06192
1/3	1.39561	0.55212	0.21843	
2/3	1.94773	0.77055		
1	2.71828			

pudiendo obtener los coeficientes c_i 's:

$$\begin{aligned} c_0 &= y_0 = 1 \\ c_1 &= \frac{\Delta y_0}{h} = \frac{0.39561}{\frac{1}{3}} = 1.18683 \\ c_2 &= \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2} = \frac{0.15651}{2(\frac{1}{3})^2} = 0.7043 \\ c_3 &= \frac{\Delta^3 y_0}{6h^3} = \frac{0.06192}{6(\frac{1}{3})^3} = 0.27864 \end{aligned}$$

Con esas diferencias, el polinomio quedaría como

$$P_n(x) = c_0 + c_1x + c_2x(x - \frac{1}{3}) + c_3x(x - \frac{1}{3})(x - \frac{2}{3}),$$

realizando las multiplicaciones y simplificando, nos queda

$$P_n(x) = 0.27864x^3 + 0.42566x^2 + 1.013983333x + 1$$

La figura 5.4 muestra los puntos a interpolar y la función interpoladora.

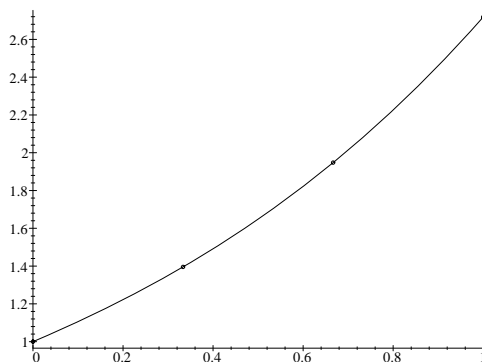


Figura 5.4: Puntos a interpolar marcados con “o” y el polinomio de Newton evaluado.

5.5. Splines Cúbicos

El objetivo de este método es el de colocar un polinomio de grado 3 en cada intervalo de datos, como se muestra en la figura 5.5, cumpliendo las siguiente condiciones:

1. Debe haber certeza de que $y_i = f(x_i)$,
2. $x_i < x_{i+1} \Rightarrow$ No se permite que haya dos x_i 's iguales $\forall i$, y

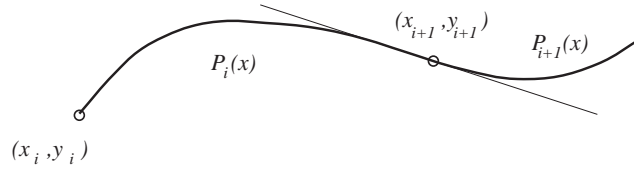


Figura 5.5: Splines cúbicos para interpolación.

3. Debe de existir en el sistema físico el concepto de velocidad y aceleración.

Sea $P_i(x)$ el polinomio de aproximación de la verdadera relación $f(x)$ en el intervalo $(x_i, y_i) \sim (x_{i+1}, y_{i+1})$, con las siguientes restricciones:

- $P_i(x_{i+1}) = P_{i+1}(x_{i+1})$, esto es, que los polinomios se unan,
- $P_i'(x_{i+1}) = P_{i+1}'(x_{i+1})$, misma pendiente en la unión,
- $P_i''(x_{i+1}) = P_{i+1}''(x_{i+1})$, misma concavidad en la unión.

Los polinomios tienen la siguiente forma:

$$P_i(x) = a_i(x - x_i)^3 + b_i(x - x_i)^2 + c_i(x - x_i) + d_i, \quad (5.30)$$

$$x_i \leq x \leq x_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n-1$$

Dado que para n datos hay $(n-1)$ intervalos, también hay $(n-1)$ polinomios. Además, ya que conocemos la forma del polinomio, podemos calcular sus derivadas:

$$P_i(x_i) = d_i \quad (5.31)$$

$$P_i'(x) = 3a_i(x - x_i)^2 + 2b_i(x - x_i) + c_i \quad (5.32)$$

$$P_i''(x) = 6a_i(x - x_i) + 2b_i \quad (5.33)$$

Y ahora, definiendo s_i como la segunda derivada de $f(x)$ evaluada en $x = x_i$, podemos calcular los coeficientes del polinomio igualando la ecuación 5.33 a s_i :

$$s_i = P_i''(x_i) = 6a_i(x_i - x_i) + 2b_i \quad (5.34)$$

de donde obtenemos que

$$b_i = \frac{s_i}{2} \quad (5.35)$$

Ahora, evaluamos la ecuación 5.34 en $x = x_{i+1}$:

$$s_{i+1} = P_i''(x_{i+1}) = 6a_i \underbrace{(x_{i+1} - x_i)}_{h_i} + 2b_i \quad (5.36)$$

y sustituyendo la ecuación 5.35 para despejar

$$a_i = \frac{s_{i+1} - s_i}{6h_i} \quad (5.37)$$

Para determinar c_i , se evalúa $P_i(x)|_{x=x_{i+1}}$:

$$y_{i+1} = P_i(x_{i+1}) = a_i h_i^3 + b_i h_i^2 + c_i h_i + d_i \quad (5.38)$$

y si sustituimos las ecuaciones 5.37, 5.35 y d_i , obtenemos:

$$y_{i+1} = \left(\frac{s_{i+1} - s_i}{6h_i} \right) h_i^3 + \frac{s_i}{2} h_i^2 + c_i h_i + y_i \quad (5.39)$$

pudiendo ahora despejar c_i :

$$c_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{h_i}{6} (2s_i + s_{i+1}) \quad (5.40)$$

Para obtener s_i , tomamos la frontera izquierda del polinomio i :

$$P'_{i-1}(x_i) = P'_i(x_i) \quad (5.41)$$

y sustituyendo las ecuaciones 5.31, 5.32 y 5.33 para obtener

$$3a_{i-1}h_{i-1}^2 + 2b_{i-1}h_{i-1} + c_{i-1} = c_i \quad (5.42)$$

Una vez más, se sustituyen las ecuaciones 5.35, 5.37 y 5.40

$$3 \left(\frac{s_i - s_{i-1}}{6h_{i-1}} \right) h_{i-1}^2 + 2 \frac{s_{i-1}}{2} h_{i-1} + \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}} - \frac{h_{i-1}}{6} (2s_{i-1} + s_i) = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{h_i}{6} (2s_i + s_{i+1}) \quad (5.43)$$

y realizando las operaciones, agrupando y simplificando, generamos las siguientes ecuaciones (funciones de concavidades)

$$h_{i-1}s_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)s_i + h_i s_{i+1} = 6 \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} + \frac{y_{i-1} - y_i}{h_{i-1}} \right), \quad (5.44)$$

$$i = 2, \dots, (n-1)$$

Las $(n-2)$ ecuaciones anteriores son en n incógnitas (las s_i 's son las incógnitas). Dado que nos faltan dos ecuaciones, se tienen las siguientes alternativas para generarlas:

1. Concavidad distinta al inicio y al final, $s_1 = K_1$ y $s_n = K_n$,
2. Igual concavidad al inicio y al final, $s_1 = s_n = K$, y
3. Linealización de la segunda derivada:

$$\frac{s_3 - s_2}{h_2} = \frac{s_2 - s_1}{h_1} \quad (5.45)$$

$$\frac{s_n - s_{n-1}}{h_{n-1}} = \frac{s_{n-1} - s_{n-2}}{h_{n-2}} \quad (5.46)$$

que simplificando, obtenemos:

$$h_2 s_1 - (h_1 + h_2) s_2 + h_1 s_3 = 0 \quad (5.47)$$

$$h_{n-1} s_{n-2} - (h_{n-2} + h_{n-1}) s_{n-1} + h_{n-2} s_n = 0 \quad (5.48)$$

Ejemplo 5.4

Igual h_i

Se tienen los siguientes puntos y se desea obtener el polinomio de interpolación mediante Splines Cúbicos.

	1	2	3	4	5
x	0	0.25	0.50	0.75	1.0
y	1.0	1.06449	1.28403	1.75505	2.71828

Solución

Para este problema, $h_i = 0.25$, $\forall i$. Procedamos a generar las ecuaciones utilizando la ecuación 5.44 y haciendo $i = 2, 3, 4$:

$$\begin{aligned} 0.25s_1 + 2(0.25 + 0.25)s_2 + 0.25s_3 &= 6 \left(\frac{1.28403 - 1.06449}{0.25} + \frac{1 - 1.06449}{0.25} \right) \\ 0.25s_2 + 2(0.25 + 0.25)s_3 + 0.25s_4 &= 6 \left(\frac{1.75505 - 1.28403}{0.25} + \frac{1.06449 - 1.28403}{0.5} \right) \\ 0.25s_3 + 2(0.25 + 0.25)s_4 + 0.25s_5 &= 6 \left(\frac{2.71828 - 1.75505}{0.25} + \frac{1.28403 - 1.75505}{0.25} \right) \end{aligned}$$

Para generar las ecuaciones restantes, utilizaremos la alternativa número 3 (ecuaciones 5.45 y 5.46):

$$\begin{aligned} 0.25s_1 - (0.25 + 0.25)s_2 + 0.25s_3 &= 0 \\ 0.25s_3 - (0.25 + 0.25)s_4 + 0.25s_5 &= 0 \end{aligned}$$

Agrupando las ecuaciones anteriores, podemos expresar el sistema completo en forma matricial y resolverlo para encontrar:

$$\begin{bmatrix} 0.25 & -0.5 & 0.25 & 0 & 0 \\ 0.25 & 1 & 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 1 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0.25 & 1 & 0.25 \\ 0 & 0 & 0.25 & -0.5 & 0.25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3.72120 \\ 6.03552 \\ 11.81304 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{s} = \begin{bmatrix} 1.51512 \\ 2.48080 \\ 3.44648 \\ 7.87536 \\ 12.30424 \end{bmatrix}$$

Los coeficientes de los polinomios se obtienen evaluando las ecuaciones 5.37, 5.35 y 5.40 con los resultados de las concavidades. Por ejemplo, para $i = 1$, tenemos:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{s_2 - s_1}{6h_1} = \frac{2.48080 - 1.51512}{6(0.25)} = \boxed{0.64378667} \\ b_1 &= \frac{s_1}{2} = \frac{1.51512}{2} = \boxed{0.75756} \\ c_1 &= \frac{y_2 - y_1}{h_1} - \frac{h_1}{6}(2s_1 + s_{i+1}) \\ &= \frac{1.06449 - 1}{0.25} - \frac{0.25}{6}[2(1.51512) + 2.48080] = \boxed{0.02833333} \\ d_1 &= y_1 = \boxed{1} \end{aligned}$$

Prosiguiendo con el cálculo para $i = 2, 3, 4$, se generan los restantes valores de los coeficientes de los polinomios, los cuales se muestran en la tabla 5.2. La figura 5.6 muestra los puntos y los polinomios de splines cúbicos evaluados.

Tabla 5.2: Coeficientes de los polinomios de Splines Cúbicos.

i	a_i	b_i	c_i	d_i
1	0.64378667	0.75756	0.02833333	1.00000
2	0.64378667	1.24040	0.52782333	1.06449
3	2.95258667	1.72324	1.26873333	1.28403
4	2.95258667	3.93768	2.68396333	1.75505

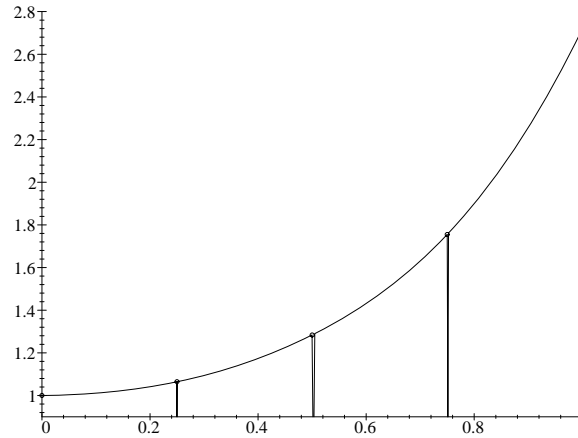


Figura 5.6: Puntos a interpolar y splines.

Ejemplo 5.5

Distinta h_i

Obtener los polinomios de interpolación mediante Splines Cúbicos para los siguientes puntos:

x	0.121	0.542	0.604	0.995	1.196	1.37
y	0.8588	-0.4911	-0.6433	-0.5214	0.0531	0.493

Solución

El número de puntos es $n = 6$. Proseguimos calculando los valores $h_i = x_{i+1} - x_i$, $i = 1, \dots, 5$:

$$\mathbf{h} = [.421 \quad .062 \quad .391 \quad .201 \quad .174]$$

Utilizando la ecuación 5.44, generamos las ecuaciones de concavidades (s_i 's) intermedias:

$$\begin{aligned} .421 s_1 + .966 s_2 + .062 s_3 &= 4.50944755 \\ .062 s_2 + .906 s_3 + .391 s_4 &= 16.5996205 \\ .391 s_3 + 1.184 s_4 + .201 s_5 &= 15.2786655 \\ .201 s_4 + .750 s_5 + .174 s_6 &= -1.98028821 \end{aligned}$$

Para generar la primera y última ecuación, utilizaremos la alternativa número 3 (ecuaciones 5.45 y 5.46):

$$\begin{aligned} .421 s_3 - .421 s_2 &= .062 s_2 - .062 s_1 \\ .201 s_6 - .201 s_5 &= .174 s_5 - .174 s_4 \end{aligned}$$

Agrupando las ecuaciones anteriores, podemos expresar el sistema de ecuaciones completo en forma matricial

$$\begin{bmatrix} 0.062 & -0.483 & 0.421 & 0 & 0 & 0 \\ 0.421 & 0.966 & 0.062 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.062 & 0.906 & 0.391 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.391 & 1.184 & 0.201 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.201 & 0.750 & 0.174 \\ 0 & 0 & 0 & 0.174 & -0.375 & 0.201 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \\ s_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4.50944755 \\ 16.59962050 \\ 15.27866550 \\ -1.98028821 \\ 0 \end{bmatrix}$$

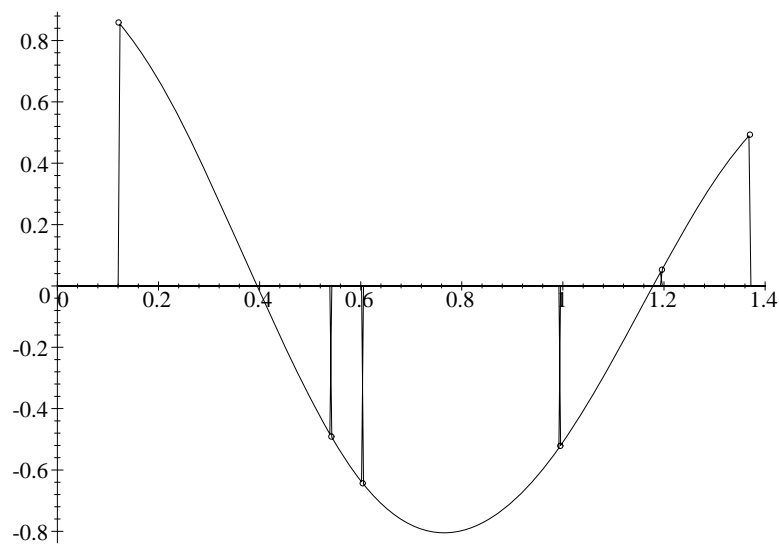
y al resolverlo, encontramos los valores de las concavidades:

$$\mathbf{s}^T = [-14.72616301, 10.19611459, 13.86637876, 8.707218025, -2.250919040, -11.73706754]$$

Tabla 5.3: Coeficientes de los polinomios de splines.

i	a_i	b_i	c_i	d_i
1	9.866301505	-7.363081505	-1.855269133	.8588
2	9.866301510	5.098057295	-2.808844326	-.4911
3	-2.199130744	6.933189375	-2.062907034	-.6433
4	-9.086349148	4.353609014	2.350231135	-.5214
5	-9.086349146	-1.125459522	2.999089184	.0531

Los coeficientes de los polinomios, que se muestran en la tabla 5.3, se obtienen de evaluar las ecuaciones 5.37, 5.35 y 5.40 en los valores de las concavidades, s_i 's, que acabamos de obtener. La figura 5.7 muestra los puntos dados y los polinomios de splines cúbicos correspondientes para cada intervalo.

**Figura 5.7:** Puntos de interpolación y polinomios de splines.

Capítulo 6

Métodos de Integración

6.1. Introducción

En cálculo integral aprendimos que la integral definida

$$I = \int_a^b f(x) dx \quad (6.1)$$

donde $f(x)$ es una función continua sobre el intervalo $[a, b]$, puede ser interpretada geoméricamente como el *área bajo la gráfica de $y = f(x)$ entre $x = a$ y $x = b$* . Dividiendo el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos iguales $[x_i, x_{i+1}]$, cada uno de longitud h , obtenemos un conjunto de rectángulos de base h , altura $f(x_i)$, y área $f(x_i)h$ (ver figura 6.1). Entonces, el área bajo la gráfica de $f(x)$ puede ser aproximada por la suma de las áreas de estos rectángulos. También la integral definida se establece como:

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)h \quad (6.2)$$

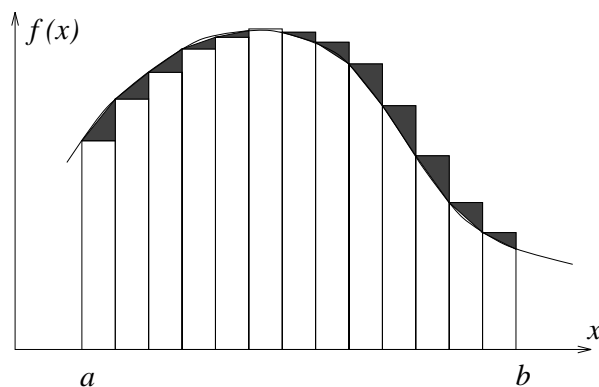


Figura 6.1: Integración mediante rectángulos

Intuitivamente, se puede decir que una mejor aproximación se podría obtener si en lugar de rectángulos ajustamos *trapezios*; de esta forma, el área entre x_i y x_{i+1} quedaría definida por:

$$t_i = \frac{h}{2} [f(x_i) + f(x_i + h)] \quad (6.3)$$

y la suma de estos trapecios nos daría la integral:

$$T = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{2} [f(x_i) + f(x_i + h)] \quad (6.4)$$

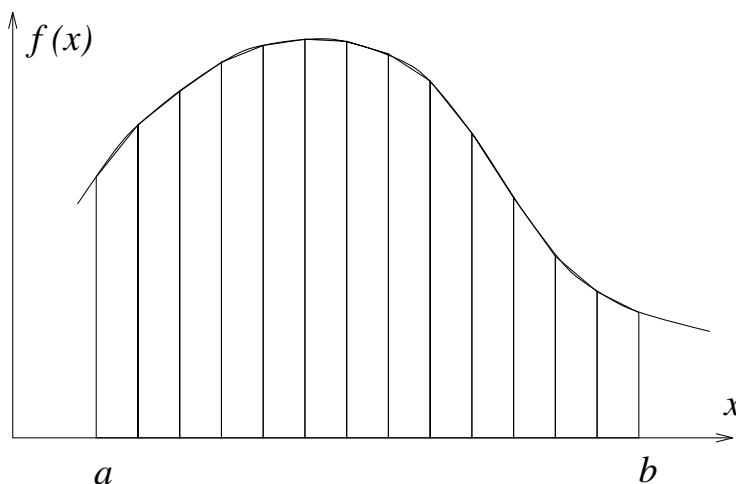


Figura 6.2: Integración mediante trapecios

6.2. Regla Trapezoidal

La integral puede ser obtenida a partir de:

$$I = \int_{x_0}^{x_n} f(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \quad (6.5)$$

y aproximando $f(x)$ en el intervalo (x_i, x_{i+1}) por el *polinomio de interpolación lineal* (forma de Newton hacia adelante):

$$P_1^i(x) = y_i + \frac{\Delta y_i}{h}(x - x_i) \quad (6.6)$$

integrando:

$$I_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} P_1^i(x) dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[y_i + \frac{\Delta y_i}{h}(x - x_i) \right] dx \quad (6.7)$$

Para simplificar la integral, se introduce la variable $u = (x - x_i)/h$, donde además $du = dx/h$. El rango de integración (x_i, x_{i+1}) en x se convierte en $(0, 1)$ en la variable u .

$$I_i = h \int_0^1 [y_i + u\Delta y_i] du \quad (6.8)$$

$$= h \left[y_i u + \frac{u^2}{2} \Delta y_i \right]_0^1 \quad (6.9)$$

$$= h \left[y_i + \frac{1}{2} \Delta y_i \right] \quad (6.10)$$

y sustituyendo la relación $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$ en la ecuación anterior, obtenemos:

$$I_i = \frac{h}{2} [y_i + y_{i+1}] \quad (6.11)$$

concluyendo en:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} I_i = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{2} [y_i + y_{i+1}] \quad (6.12)$$

Si ahora expresamos la ecuación anterior en forma expandida, obtenemos:

$$T = \frac{h}{2} [y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n] \quad (6.13)$$

6.3. Regla de Simpson 1/3

La regla requiere que n sea par:

$$Q_{22} = \frac{h}{3} [y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \cdots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n] \quad (6.14)$$

y se logra definiendo la integral como

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} \int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x) dx \quad (6.15)$$

y aproximando $f(x)$ por un *polinomio de interpolación de orden 2* sobre cada subintervalo (x_{2i}, x_{2i+2}) . El superíndice i en $P_2^i(x)$ denota el i -ésimo par de ordenadas. Si ahora obtenemos la integral de cada polinomio

$$\begin{aligned} I_i &= \int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} P_2^i(x) dx \\ &= \int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} \left[y_{2i} + \frac{\Delta y_{2i}}{h} (x - x_{2i}) + \frac{\Delta^2 y_{2i}}{2h^2} (x - x_{2i})(x - x_{2i+1}) \right] dx \end{aligned} \quad (6.16)$$

Para simplificar, hacemos $u = (x - x_{2i})/h$ y $du = dx/h$; de esta manera, el intervalo (x_{2i}, x_{2i+2}) en x pasa a ser $(0, 2)$ en u . Sustituyendo,

$$I_i = h \int_0^2 \left[y_{2i} + u \Delta y_{2i} + u(u-1) \frac{\Delta^2 y_{2i}}{2} \right] du \quad (6.17)$$

$$= h \left[u y_{2i} + \frac{u^2}{2} \Delta y_{2i} + \left(\frac{u^3}{3} - \frac{u^2}{2} \right) \frac{\Delta^2 y_{2i}}{2} \right]_0^2 \quad (6.18)$$

$$= h \left[2y_{2i} + 2\Delta y_{2i} + \frac{1}{3} \Delta^2 y_{2i} \right] \quad (6.19)$$

y tomando en cuenta las relaciones

$$\Delta y_{2i} = y_{2i+1} - y_{2i} \quad (6.20)$$

$$\Delta^2 y_{2i} = y_{2i+2} - 2y_{2i+1} + y_{2i} \quad (6.21)$$

y ahora agrupando términos, podemos obtener:

$$I_i = \frac{h}{3} [y_{2i} + 4y_{2i+1} + y_{2i+2}] \quad (6.22)$$

El valor de la integral total en el intervalo (a, b) se logra sumando las integrales resultantes mediante la ecuación 6.22 de cada subintervalo. Si hacemos esa sumatoria y la expandemos, resulta la *Regla de Simpson* $\frac{1}{3}$:

$$I = \frac{h}{3} [y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \cdots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n] \quad (6.23)$$

6.4. Regla de Simpson 3/8

Esta regla es una derivación parecida a las anteriores, solo que ahora el *polinomio de interpolación es de orden 3*, n debe ser múltiplo de 3 y polinomio se ajustará entre 3 puntos, generando de esta manera, trios de subintervalos: (x_{3i}, x_{3i+3}) . La integral de cada subintervalo quedaría como

$$I_i = \int_{x_{3i}}^{x_{3i+3}} P_3^i(x) dx \quad (6.24)$$

Si al igual que en la sección anterior, introducimos la variable u . Después de haber integrado y sustituido las definiciones de las diferencias hacia adelante hasta de orden 3, podemos obtener la fórmula de la regla:

$$I_i = \frac{3h}{8} [y_{3i} + 3y_{3i+1} + 3y_{3i+2} + y_{3i+3}] \quad (6.25)$$

y así obtener la *Regla de Simpson $\frac{3}{8}$* :

$$I = \frac{3h}{8} [y_0 + 3y_1 + 3y_2 + 2y_3 + 3y_4 + \cdots + 3y_{n-1} + y_n] = Q_{33} \quad (6.26)$$

Ejemplo 6.1

Se desea obtener el valor numérico de la siguiente expresión:

$$I \equiv \int_1^2 \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \Big|_1^2 = 0.5$$

Solución

Regla Trapezoidal

Para (a) $h = 1$, (b) $h = 0.5$ y (c) $h = 0.25$.

$$I = \frac{h}{2} [y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n] \quad (6.27)$$

$$(a) \quad I = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} \right] = 0.625$$

$$(b) \quad I = \frac{0.5}{2} \left[\frac{1}{1^2} + \frac{2}{(1.5)^2} + \frac{1}{2^2} \right] = 0.534722$$

$$(c) \quad I = \frac{0.25}{2} \left[\frac{1}{1^2} + \frac{2}{(1.25)^2} + \frac{2}{(1.5)^2} + \frac{2}{(1.75)^2} + \frac{1}{2^2} \right] = 0.508993$$

Regla de Simpson $\frac{1}{3}$

Para (a) $h = 0.5$ y (b) $h = 0.25$.

$$(a) \quad I = \frac{0.5}{3} \left[\frac{1}{1^2} + \frac{4}{(1.5)^2} + \frac{1}{2^2} \right] = 0.50463$$

$$(b) \quad I = \frac{0.25}{3} \left[\frac{1}{1^2} + \frac{4}{(1.25)^2} + \frac{2}{(1.5)^2} + \frac{4}{(1.75)^2} + \frac{1}{2^2} \right] = 0.500418$$

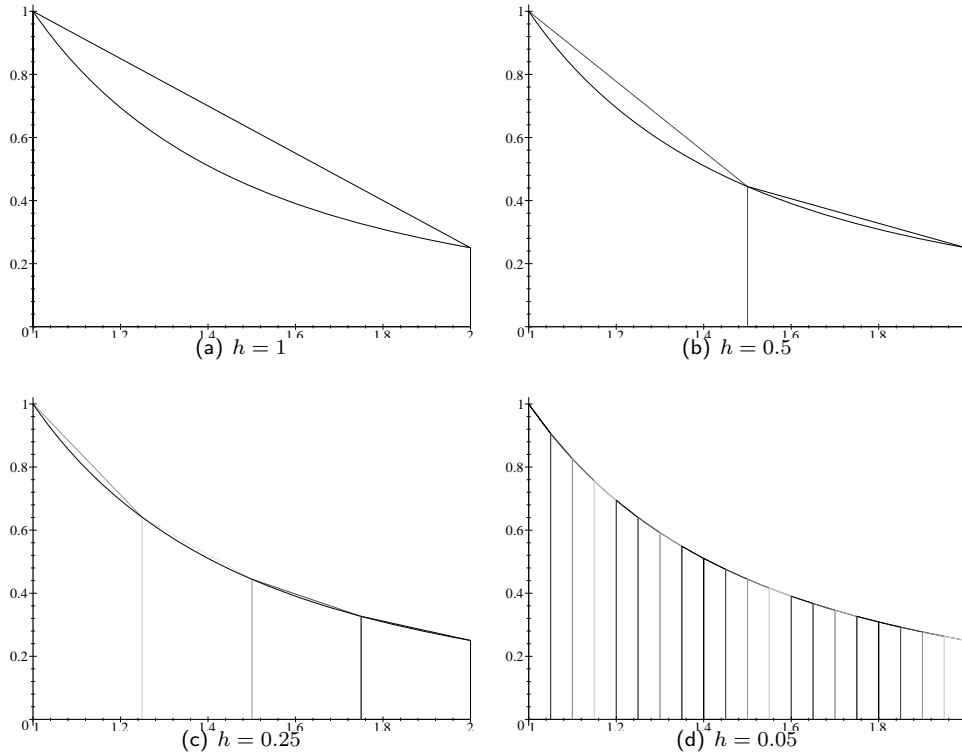


Figura 6.3: Integración mediante la Regla Trapezoidal para diferentes h

6.5. Método de Romberg

El método se puede derivar con ayuda de los siguiente dos pasos:

1. Calcular la suma de trapecios para $\int_a^b f(x) dx$, utilizando sucesivamente los intervalos dados por $h_0 = b - a$, $h_1 = h_0/2$, $h_2 = h_0/2^2$, \dots , $h_k = h_0/2^k$.
2. Aplicar interpolación lineal repetidamente (iterativamente) en la variable h^2 , comenzando con los puntos (h_0^2, T_0^0) , (h_1^2, T_0^1) , (h_2^2, T_0^2) , \dots , (h_k^2, T_0^k) , donde T_0^k son la suma de trapecios con intervalo h_k ($k = 0, 1, 2, \dots$).

Primeramente, calcular el área T_0^0 para $h_0 = b - a$

$$T_0^0 = \frac{h_0}{2} [f(x_0) + f(x_0 + h_0)] \quad (6.28)$$

Dividamos ahora el intervalo h_0 a la mitad, para obtener $h_1 = h_0/2$ y calcular el área T_0^1 de los trapecios resultantes

$$T_0^1 = \frac{h_1}{2} [f(x_0) + 2f(x_0 + h_1) + f(x_0 + 2h_1)] \quad (6.29)$$

Si volvemos a dividir el intervalo a la mitad, podemos obtener T_0^2 :

$$T_0^2 = \frac{h_2}{2} \left[f(x_0) + 2 \sum_{j=1}^{2^2-1} f(x_0 + jh_2) + f(x_0 + 2^2h_2) \right] \quad (6.30)$$

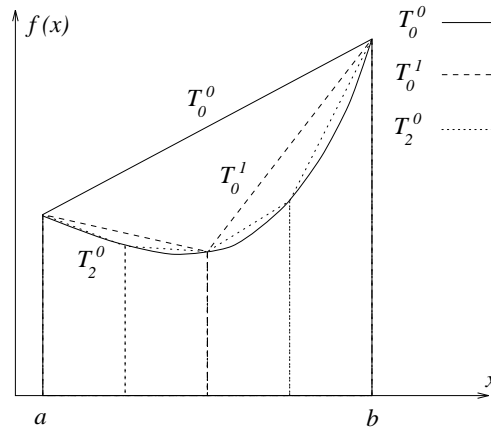


Figura 6.4: Proceso iterativo del Método de Romberg

y si continuamos dividiendo a la mitad el intervalo, tendríamos la fórmula general:

$$T_0^k = \frac{h_k}{2} \left[f(x_0) + 2 \sum_{j=1}^{2^k-1} f(x_0 + jh_k) + f(x_0 + 2^k h_k) \right] \quad (6.31)$$

hasta que h_k sea una suficientemente pequeña subdivisión del intervalo original h_0 . El procedimiento computacional genera una secuencia de sumas de trapecios $T_0^0, T_0^1, T_0^2, \dots, T_0^k$ que convergen al valor de la integral definida $\int_a^b f(x) dx$ de tal manera que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} T_0^k = \int_a^b f(x) dx \quad (6.32)$$

Se puede demostrar que el error de integración numérica por la Regla Trapezoidal es de orden h^2 ($O(h^2)$), donde h es el tamaño del intervalo. Dicho error lo podemos escribir como sigue:

$$E_k = I - T_0^k = -\frac{b-a}{12} f''(\bar{x}) h_k^2, \quad \bar{x} \in (a, b) \quad (6.33)$$

y de igual manera, si utilizamos un intervalo $h_{k+1} = h_k/2$, el error es:

$$E_{k+1} = I - T_0^{k+1} = -\frac{b-a}{12} f''(\bar{\bar{x}}) h_k^2, \quad \bar{\bar{x}} \in (a, b) \quad (6.34)$$

Si ahora, $f''(\bar{x})$ y $f''(\bar{\bar{x}})$ son promedios de los valores de $f''(x)$ en los intervalos h_k y h_{k+1} , respectivamente, se puede asumir que $f''(\bar{x}) \cong f''(\bar{\bar{x}})$. Asumiendo lo anterior, podemos escribir las relaciones de la siguiente forma:

$$T_0^k = I + g(x) h_k^2 \quad (6.35)$$

$$T_0^{k+1} = I + g(x) h_{k+1}^2 \quad (6.36)$$

donde $g(x) = \frac{b-a}{12} f''(\bar{x}) = \frac{b-a}{12} f''(\bar{\bar{x}})$. Si ahora resolvemos para I premultiplicando la primera relación por h_{k+1}^2 y la segunda por h_k^2 , obteniendo:

$$T_0^k h_{k+1}^2 = I h_{k+1}^2 + g(x) h_k^2 h_{k+1}^2 \quad (6.37)$$

$$T_0^{k+1} h_k^2 = I h_k^2 + g(x) h_{k+1}^2 h_k^2 \quad (6.38)$$

y restando la primera ecuación de la segunda y resolviendo para I , tenemos:

$$I = \frac{T_0^{k+1}h_k^2 - T_0^k h_{k+1}^2}{h_k^2 - h_{k+1}^2} \quad (6.39)$$

Si ahora consideramos los puntos (h_k^2, T_0^k) y (h_{k+1}^2, T_0^{k+1}) como puntos en una gráfica, teniendo h^2 como abscisa y T_0 como ordenada. Si hacemos pasar una línea recta por ellos para *extrapolar* hasta $h_2 = 0$, es decir, cuando la línea corte el eje de las ordenadas, tendríamos:

$$T_1^k = \frac{T_0^{k+1}h_k^2 - T_0^k h_{k+1}^2}{h_k^2 - h_{k+1}^2} \quad (6.40)$$

y sustituyendo $h_{k+1} = h_k/2$, la ecuación anterior se reduce a:

$$T_1^k = \frac{4T_0^{k+1} - T_0^k}{3} \quad (6.41)$$

que es exactamente la ecuación a la que habíamos llegado anteriormente. Además, se puede demostrar que la ecuación anterior es equivalente a la regla de Simpson de intervalo h_{k+1} (teniendo un error de h^4) y la fórmula que se obtenga es equivalente a la cuadratura cerrada de Newton-Cotes de intervalo h_{k+2} . Geométricamente, se puede interpretar como la interpolación lineal de 2 puntos de Simpson extrapolando hasta h^4 .

De esta manera se puede obtener una fórmula para interpolaciones lineales repetidas de los puntos del trapecio en la variable h^2 y extrapolando hasta $h^2 = 0$ con la siguiente fórmula:

$$T_m^k = \frac{T_{m-1}^{k+1}h_k^2 - T_{m-1}^k h_{k+m}^2}{h_k^2 - h_{k+m}^2} \quad (6.42)$$

pudiendola reducir con la sustitución de $h_{k+1} = h_k/2$ para obtener la fórmula básica del algoritmo de Romberg para integración numérica:

$$T_m^k = \frac{4^m T_{m-1}^{k+1} - T_{m-1}^k}{4^m - 1}. \quad (6.43)$$

Ejemplo 6.2

Utilice el método de Romberg para evaluar la siguiente integral definida

$$\int_0^1 x^2 e^x dx$$

utilizando un $\epsilon = 0.00005$ y una $\delta = 0.125$.

Solución

Primeramente, se calculan las dos primeras sumas trapezoidales para $h = 1$ y $h = 0.5$ y se aplica el método de Romberg:

h	T_0^k	T_1^k	T_2^k	T_3^k
1	1.359140914			
0.5	0.885660616	0.727833850		
0.25	0.760596332	0.718908237	0.718313196	
0.125	0.728890177	0.718321458	0.718282339	0.718281849

La convergencia se va efectuando para todos los elementos de una misma fila, es decir, se calculan T_0^0 y T_0^1 para obtener T_1^0 , el cual sería el último elemento a calcular de esa fila. Posteriormente, si no se cumple con el error establecido, se calcula la siguiente suma trapezoidal, T_0^2 y con este otro elemento ya se pueden calcular: T_1^1 y T_2^0 . El proceso continua hasta que la interpolación haya convergido para el error, ϵ , especificado.

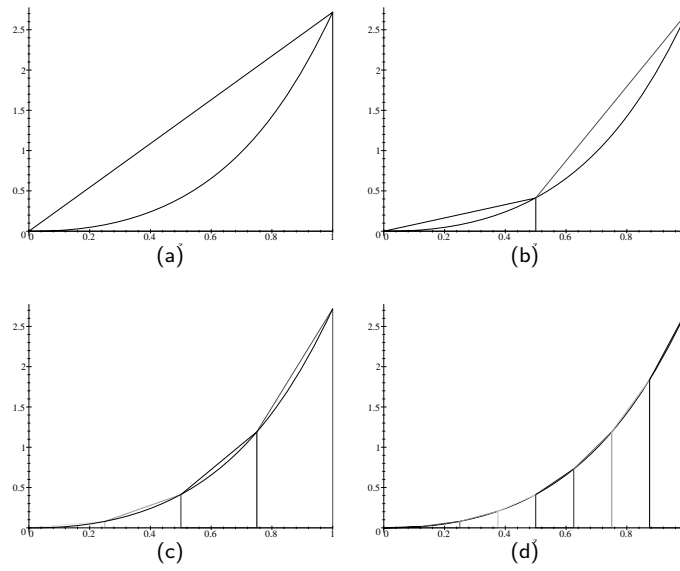


Figura 6.5: Trapecios y función a integrar

Los trapecios generados sobre la gráfica de la función son los que se muestran en la figura 6.5. La solución analítica es:

$$\int_0^1 x^2 e^x dx = e^x (x^2 - 2x + 2) \Big|_0^1 = 0.718281828$$