LAS DEMOSTRACIONES GEOMÉTRICAS

Pedro Alegría (pedro.alegria@ehu.es)

La elegancia de las demostraciones geométricas es directamente proporcional al número de ideas que en ellas vemos e inversamente proporcional al esfuerzo requerido para comprenderlas.

G. Pólya (1887-1985)

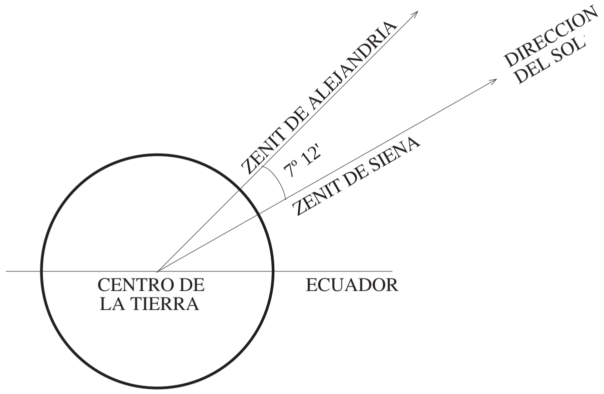
ÍNDICE

No es usual en la formación matemática actual conocer los principales hechos de la geometría elemental clásica. Sin embargo, a lo largo de la historia muchos resultados obtenidos por motivos puramente intelectuales han dado gran impulso a muchas áreas de las matemáticas, así como a multitud de aplicaciones. Aquí daremos una panorámica superficial a algunas ideas, sobre todo de matiz recreativo y curioso, a fin de suscitar la curiosidad del lector, lo que pueda llevarle a profundizar en estos temas.

1. ORIGEN DE LA GEOMETRÍA.

De todas las aportaciones conseguidas por los astrónomos griegos, ninguna es más interesante que la famosa medida de la circunferencia y el diámetro de la Tierra realizada por Eratóstenes, con un error de 80 Km. respecto al valor que se usa actualmente. Su ingenioso método fue el siguiente:

De los archivos de la época descubrió que a mediodía de cierto día del año podía verse el sol reflejado en cierto pozo de Siena, a 800 Km. al sur de Alejandría; esto significaba que en ese momento el Sol estaba en su punto más alto. De acuerdo a esto, al llegar ese día, midió la sombra de una columna en Alejandría (en el mismo meridiano de Siena), a mediodía, encontrando la inclinación del sol 1/50 de una circunferencia completa ($7°1/5$) al sur de la vertical. Como los rayos del sol son prácticamente paralelos, se concluía, no sólo que la Tierra no es plana, sino que los 800 Km. de distancia del arco entre Alejandría y el pozo abarcaban un ángulo central de $7°1/5$ (supuesta la Tierra esférica), lo que proporciona un valor para la circunferencia de la Tierra igual a $800 \cdot 50$ Km. = 40000 Km.



2. POSTULADOS DE EUCLIDES.

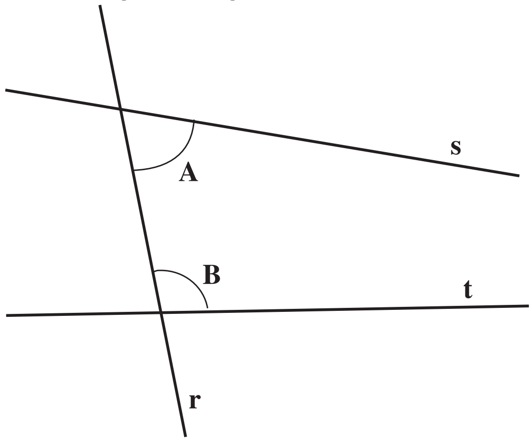
En el siglo III a.C., el matemático griego Euclides escribió su obra principal, ELEMENTOS, un extenso tratado de matemáticas compuesto por 13 volúmenes sobre materias tales como geometría plana, proporciones en general, propiedades de los números, magnitudes inconmensurables y geometría del espacio. Probablemente estudió en Atenas con discípulos de Platón. Enseñó geometría en Alejandría y allí fundó una escuela de matemáticas. Los Cálculos (una colección de teoremas geométricos), los Fenómenos (una descripción del firmamento), la Optica, la División del canon (un estudio matemático de la música) y otros libros se han atribuido durante mucho tiempo a Euclides. Sin embargo, la mayoría de los historiadores cree que alguna o todas estas obras (aparte de los Elementos) se le han adjudicado erróneamente. Los historiadores cuestionan la originalidad de algunas de sus aportaciones. Probablemente las secciones geométricas de los Elementos fueron en un principio una revisión de las obras de matemáticos anteriores, como Eudoxo, pero se considera que Euclides hizo diversos descubrimientos originales en la teoría de números.

Hasta ese momento, la Geometría era un conjunto de resultados empíricos utilizados para medir y dibujar figuras. Con Euclides pasa a ser una ciencia deductiva; a partir de ciertos conocimientos prefijados, y mediante un proceso lógico, se concluyen resultados. Los Elementos de Euclides se utilizaron como texto durante 2.000 años, e incluso hoy, una versión modificada de sus primeros libros forma la base de la enseñanza de la geometría plana en las escuelas secundarias. La primera edición impresa de las obras de Euclides que apareció en Venecia en 1482 fue una traducción del árabe al latín.

Además de 23 definiciones y varias suposiciones implícitas, que expresaban ideas familiares a cualquiera, Euclides dedujo la mayor parte de los resultados sobre la geometría del plano a partir de cinco postulados o axiomas:

1. *Dados dos puntos, siempre existe una recta que pase por ellos.*
2. *Toda recta puede extenderse indefinidamente en la misma dirección.*
3. *Con un punto como centro y cualquier radio dado se puede trazar una circunferencia.*
4. *Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.*
5. *Si una recta corta a otras dos de tal modo que los ángulos interiores del mismo lado suman menos que dos rectos, al prolongar indefinidamente estas dos rectas, se cortan en ese mismo lado.*

El quinto postulado se refiere al diagrama siguiente:



Si la suma de los ángulos A y B es menor que dos rectos, las rectas s y t, al prolongarse, se deben cortar en el lado donde están los ángulos A y B.

Los postulados 1 y 3 constituyen el escenario de las construcciones con regla y compás que fueron típicas hasta mediados del siglo XIX. Se puede decir que están basados en experiencias prácticas.

El segundo postulado expresa una creencia común de que las rectas no terminan y que el espacio no está acotado.

El cuarto postulado asegura la homogeneidad del plano: en cualquier dirección y a través de cualquier punto, cualquier par de rectas perpendiculares forman el mismo ángulo, llamado por ello recto. Queremos pensar que este postulado ha sido también justificado por la experiencia diaria adquirida por el hombre en la porción finita y habitada de nuestro universo y extrapolada a la parte del universo cuya existencia sentimos y en la que creemos.

La compleja elaboración del quinto postulado contrasta con la simplicidad del resto. El mismo Euclides, probablemente, tuvo sentimientos similares pues no usó este postulado hasta la proposición I.29. Más bien, el postulado parece una proposición más que una realidad básica. Ahora sabemos que es imposible deducir este postulado de los otros cuatro. Los numerosos intentos de hacer esto han proporcionado una gran variedad de enunciados equivalentes al propio postulado. Algunos ejemplos son los siguientes:

1. *Existe al menos un par de triángulos semejantes no congruentes.*
2. *Existe un par de rectas equidistantes en todos sus puntos.*
3. *Dados tres puntos no alineados, existe una circunferencia que pasa por todos ellos.*
4. *Si tres de los ángulos de un cuadrilátero son rectos, el cuarto también es un ángulo recto.*
5. *Por un punto exterior a una recta se puede trazar una paralela y sólo una.*
6. *Si una recta corta a una de dos rectas paralelas, también corta a la otra.*
7. *Dos rectas paralelas a una tercera son paralelas entre sí.*
8. *Dos rectas que se cortan no pueden ser paralelas a una tercera.*
9. *No existe una cota superior para el área de un triángulo.*

Señalemos que el recíproco de esta afirmación es cierto en las geometrías de Riemann y Lobachevski. Es también curioso el hecho de que el postulado de las paralelas, así como sus enunciados equivalentes, todos intuitivos, es equivalente al teorema de Pitágoras.

3. GEOMETRÍAS NO EUCLÍDEAS.

Durante 23 siglos los matemáticos creyeron que el quinto postulado se podía demostrar basándose en los otros cuatro, pero los esfuerzos para probarlo fueron inútiles. No fue hasta finales del siglo pasado cuando se probó que el quinto postulado es independiente de los demás.

Entre los intentos de prueba citaremos el de G. Saccheri en 1733, quien consideraba las siguientes tres posibilidades con respecto al número de rectas que pasan por un punto, con respecto a otra recta:

A) hay exactamente una paralela;

B) no hay paralelas;

C) hay más de una paralela;

conocidas como las hipótesis del ángulo recto, obtuso y agudo, respectivamente. Como no llegaba a contradicciones al suponer la hipótesis C), afirmó que ésta repugna a la naturaleza de la línea recta.

En 1824, el matemático alemán Carl Friedrich Gauss escribió que la suposición de que la suma de los tres ángulos de un triángulo es menor que 180 grados conduce a una curiosa geometría, diferente de la existente, pero completamente consistente. Él inventó el término de Geometría no euclídea pero nunca publicó nada sobre el particular.

Años después, y de forma independiente, el húngaro János Bolyai y el ruso Nikolái Lobachevski demostraron la posibilidad de construir un sistema geométrico coherente, en el que el postulado de la paralela única de Euclides se reemplaza por otro que nos dice que se puede dibujar un número infinito de paralelas a una recta que pasan por un punto exterior a ésta. Descubrieron pues la geometría no euclídea bajo la hipótesis C), lo que equivale a la suposición de Gauss. Ya la posibilidad B) había sido descartada por Saccheri por contradecir el segundo postulado. Más tarde, alrededor de 1860, el matemático alemán Bernhard Riemann advirtió que la interpretación asumida por todos sobre el segundo postulado no necesariamente era correcta, pues una recta puede extenderse indefinidamente sin necesidad de ser no acotada (por ejemplo, los círculos, al no tener extremos, pueden extenderse indefinidamente pero son finitos). Mostró de este modo que una geometría en la que no existen líneas paralelas también es posible.

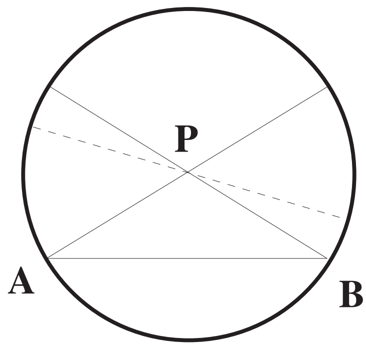
En el primer postulado también estaba implícito el hecho de que por dos puntos sólo puede pasar una recta. También Riemann modificó este postulado, de modo que, además del tercero y el cuarto, propuso los siguientes:

1') Por dos puntos distintos pasa al menos una recta.

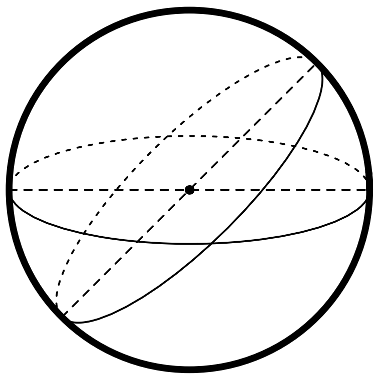
2') Las rectas no están acotadas.

5') Cualquier par de rectas en un plano se cortan.

Los detalles de estos dos tipos de geometría no euclidiana son complejos, pero ambos se pueden demostrar utilizando modelos sencillos. La geometría Bolyai-Lobachevski, llamada normalmente geometría no euclidiana hiperbólica, describe la geometría de un plano que está formado sólo por los puntos interiores de un círculo en el que todas las posibles líneas rectas son cuerdas del círculo (segmentos abiertos) y los puntos son los del interior del círculo. Este modelo fue propuesto por Beltrami en 1868. Como se ve en la figura, se puede dibujar un número infinito de rectas paralelas a la recta AB, es decir rectas que no cortan a AB, que pasen por el punto P exterior a AB.



De la misma manera, la geometría riemanniana o no euclidiana elíptica, es la geometría de la superficie de una esfera en la que todas las líneas rectas son círculos máximos y los puntos son puntos ordinarios sobre la esfera. Como hemos visto, la suma de los ángulos de un triángulo aquí es mayor que 180°. La figura siguiente muestra la imposibilidad de dibujar un par de líneas paralelas en esta superficie.



Una forma sencilla de ilustrar lo anterior es considerar el siguiente problema, seguramente conocido por muchos.

Una persona sale de su casa un día y camina 10 Km. al sur, después 10 Km. al oeste y después 10 Km. al norte para encontrarse de nuevo en su casa. ¿Cómo es esto posible?

Es bien sabido que una de las soluciones es que viva en el polo norte (sin embargo, hay una infinidad de otras soluciones). Ahora bien, esto plantea el siguiente dilema: el recorrido seguido forma un triángulo pero dos de los ángulos son rectos. Por lo tanto, la suma de los ángulos del triángulo es mayor que dos rectos, lo que contradice el quinto axioma de la geometría euclídea.

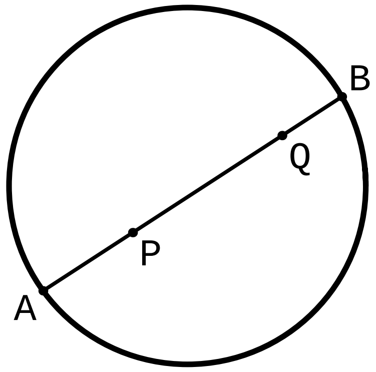
El descubrimiento de las geometrías no euclídeas tuvo un profundo impacto en el desarrollo de las matemáticas de los siglos XIX y XX. A pesar de estar basados los postulados de Euclides en la intuición de los objetos geométricos, el descubrimiento de las geometrías no euclídeas puso de manifiesto sus omisiones lógicas. Esto hizo que los métodos axiomáticos ya no fueran basados en la intuición y debieran ser formalizados.

El siguiente paso consistía en hacer que el público admitiese la idea de la existencia de otras posibles geometrías, aunque formalmente se trataba de algo similar a lo planteado por Euclides; éste construyó su teoría desarrollando una gran cantidad de resultados a partir de unas pocas premisas.

Poincaré dio una respuesta a la objeción natural de por qué definir de esa manera los términos primitivos de recta y plano. En cualquier lenguaje, las mismas palabras tienen varias interpretaciones y las mismas frases con significado diferente pueden tener un sentido para unos y otro para otros.

Otro tipo de argumentos contra los que niegan que las rectas puedan ser segmentos acotados consiste en definir la distancia de una forma axiomática, no sólo en el sentido de Euclides. Por ejemplo, en un círculo, si definimos

$$d(P,Q) = \log \frac{|AQ| \cdot |PB|}{|AP| \cdot |QB|}$$



cumple todos los axiomas de un espacio métrico, pero a medida que Q se aleja de P, la distancia crece indefinidamente. Esto quiere decir que $d(A, B) = \infty$.

Actualmente, el conjunto de postulados de la geometría euclídea es mucho mayor que los cinco originales. A principios de este siglo, Veblen incorporó a los axiomas de Euclides, del tipo de propiedades de incidencia, los axiomas de orden, congruencia y continuidad.

Para distancias relativamente pequeñas, la geometría euclidiana y las no euclidianas son esencialmente equivalentes. Sin embargo, al trabajar con el espacio astronómico o con problemas de la física moderna como la relatividad o la teoría de propagación de ondas, las geometrías no euclidianas dan una descripción más precisa que la euclidiana de los fenómenos observados. Por ejemplo, la teoría de la relatividad desarrollada principalmente por Albert Einstein está basada en una geometría riemanniana de espacio curvo.

En conclusión, el quinto postulado de Euclides, presentado hace más de 2300 años, ha dado lugar en tan sólo dos siglos a un desarrollo espectacular de la geometría. Esta, al poder liberarse de este axioma, se ha podido aplicar en otras muchas ramas de la ciencia, siendo la teoría de la relatividad uno de sus exponentes de más impacto actual.

4. GEOMETRÍA URBANA.

Para apreciar mejor la geometría euclídea, lo mejor es tener algún contacto con geometrías no euclídeas. Si la geometría euclídea es un modelo adecuado al mundo natural, la geometría "urbana.º del "taxista.es mejor para el mundo artificial construido por el hombre.

En la geometría euclídea, para medir la distancia entre dos puntos, se aplica el teorema de Pitágoras construyendo un triángulo rectángulo con catetos paralelos a los ejes. Aquí basta sumar las longitudes de dichos catetos.

$$\begin{aligned} d_E(x, y) &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \\ d_T(x, y) &= |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|. \end{aligned}$$

Las circunferencias $\{P \in \mathbb{R}^2 : d_T(P, C) = r\}$ con $C = (a, b)$ y $r > 0$ fijos tienen con esta definición forma cuadrada (rombo):

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - a| + |y - b| = r\}.$$

Esta geometría no sólo corresponde al caso del taxista en una ciudad con una distribución de calles en retícula rectangular, sino que los ecologistas la consideran apropiada para medir la superposición de nichos y la noción de distancia ecológica entre especies.

Una pregunta natural y de fácil respuesta es el de asignar el valor de π.

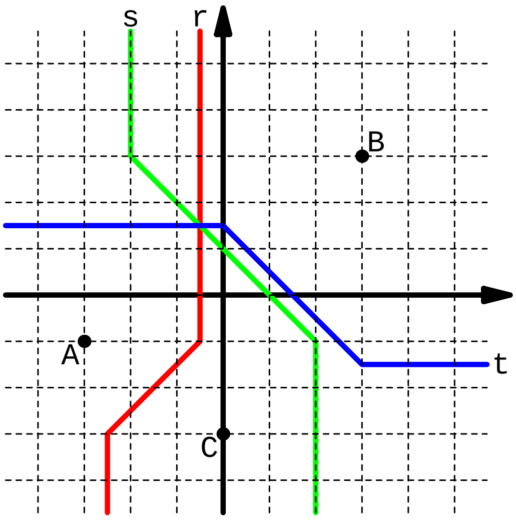
Vamos a considerar el siguiente problema en esta geometría, donde suponemos una ciudad en que cada lugar se interpreta como un punto en un sistema de coordenadas rectangular:

En la ciudad de Nueva York, Ana trabaja en $A = (-3, -1)$, Benito en $B = (3, 3)$ y su hijo Carlos va al colegio en $C = (0, -3)$.

a) ¿Dónde deberían vivir para que cada uno tuviese que caminar la misma distancia para ir a su trabajo o al colegio?

b) ¿Dónde deberían vivir si deciden que el niño sea el que menos deba caminar y Ana la que más camine?

El problema consiste en encontrar el circuncentro, punto que equidista de los tres puntos dados, aunque su posición difiera de la que corresponde en el caso de la geometría euclídea.



En el dibujo, la línea r representa la mediatriz del segmento AC, s la mediatriz del segmento AB y t la mediatriz de BC. El punto de intersección de ellas será el lugar buscado.

Un problema básico en investigaciones geométricas es el de describir el grupo de isometrías de un espacio métrico (X, d) en sí mismo.

En el ejemplo clásico del plano euclídeo con la métrica d_E, el citado grupo consiste en las traslaciones, rotaciones, reflexiones y reflexiones deslizadas del plano:

$$E(2) = O(2) \oplus T(2)$$

donde $O(2)$ es el grupo ortogonal (el grupo simétrico generado por las rotaciones y reflexiones del círculo unidad) y $T(2)$ es el grupo de traslaciones del plano.

Si consideramos el plano $\mathbb{R}^2$ con la métrica d_T, se comprueba que el grupo de isometrías es el producto semidirecto de D_4 (grupo de simetrías del cuadrado) y $T(2)$.

Hay ocho isometrías euclídeas que también preservan la distancia d_T entre dos puntos:

(1) traslación;

(2) rotación de 180°;

(3) reflexión deslizada según recta horizontal;

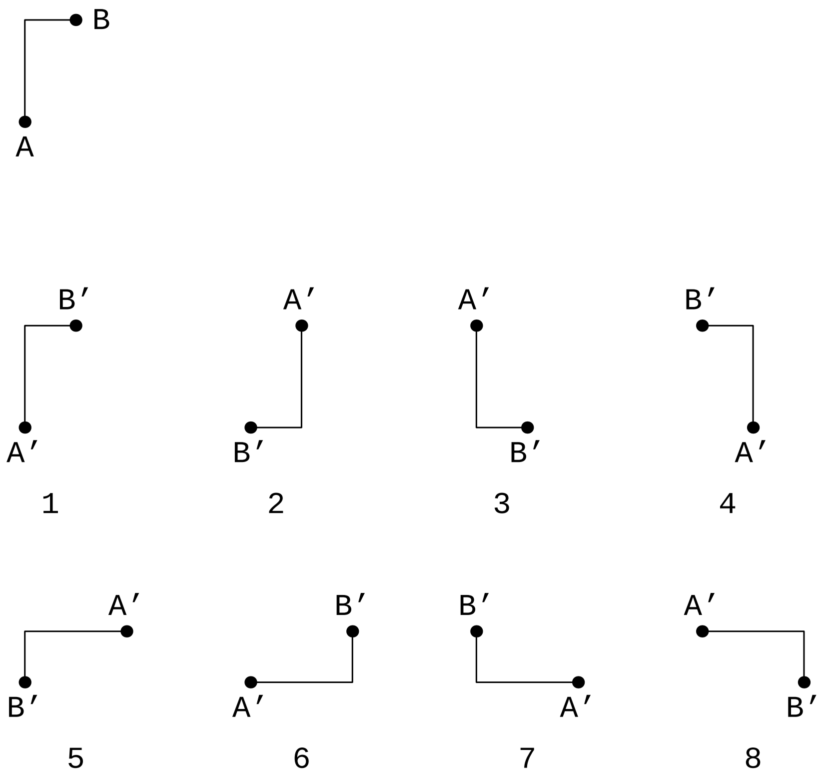
(4) reflexión deslizada según recta vertical;

(5) reflexión deslizada según recta de pendiente 1;

(6) reflexión deslizada según recta de pendiente -1;

(7) rotación de 90°;

(8) rotación de 270°.



5. TEORÍA AXIOMÁTICA.

Para desarrollar cualquier rama de la Matemática, en cada definición de nuevos conceptos intervienen otros conceptos anteriores, y mediante el razonamiento lógico se obtienen proposiciones a partir de otras ya establecidas, las cuales a su vez se han debido deducir de otras anteriores. Para evitar un círculo vicioso, se deben admitir ciertos conceptos primitivos que permanecerán sin definir y proposiciones primitivas, llamadas axiomas o postulados, que quedarán sin demostrar. Estos formarán la base de la teoría matemática de que se trate.

Una condición que debe cumplir el sistema de axiomas es la de ser compatible, es decir que no haya ninguna contradicción entre ellos. También se debe exigir que los axiomas sean independientes, es decir que ninguno de ellos, ni su negación, pueda deducirse a partir de los demás.

Una cuestión no resuelta completamente es de de la integridad del sistema, esto es, la de asegurar que no se puede formular ningún otro axioma independiente de los ya establecidos.

Ahora bien, en una misma disciplina pueden darse diversos sistemas de axiomas equivalentes:

en un sistema una proposición puede ser axioma y en otro teorema.

Del mismo modo, un mismo sistema axiomático puede tener diversas interpretaciones o aplicaciones concretas.

Ilustraremos lo anterior con los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 1.

A1) Existen elementos P y r relacionados de la siguiente manera: Dos elementos de P (P_1 y P_2) determinan uno de r y sólo uno.

D1) En la situación anterior, se dice que r pasa por P_1 y P_2.

A2) Existe por lo menos un P.

A3) A cada r pertenecen por lo menos dos P distintos.

A4) Por cada P pasan por lo menos dos r distintos.

T1) Existen por lo menos tres P distintos.

Demostración. Aplicar sucesivamente los axiomas 2, 4, 3 y 1.

Veamos distintas interpretaciones de esta teoría.

(1) P son los puntos y r las rectas en el espacio.

(2) P son las rectas y r los puntos en el espacio.

(3) P son las rectas y r los puntos en el plano.

(4) P son los puntos y r las rectas en el plano.

(5) P son los vértices y r los lados de un triángulo.

(6) P son los vértices y r las aristas de un tetraedro.

EJEMPLO 2.

Se considera una colección finita y no vacía S de personas y ciertos clubes formados por esas personas. Estableceremos como términos básicos la colección S de gente y los clubes a los cuales estas personas pertenecen y como axiomas los siguientes:

A1) Toda persona de S es miembro al menos un club.

A2) Para cada par de personas de S hay uno y sólo un club al cual ambas pertenecen.

D1) Dos clubes que no tienen miembros en común se llaman clubes conjugados.

A3) Para cada club hay uno y sólo un club conjugado.

Deducir de estos postulados los siguientes teoremas:

T1) Toda persona de S es un miembro al menos de dos clubes.

T2) Todo club contiene al menos dos miembros.

T3) S contiene al menos cuatro personas.

T4) Hay al menos seis clubes.

T5) Ningún club contiene más de dos miembros.

EJEMPLO 3.

Consideramos los mismos términos primitivos del ejemplo anterior pero los siguientes axiomas:

A1) Cualesquiera dos clubes distintos tienen uno y sólo un miembro en común.

A2) Cada persona de S pertenece a dos y sólo dos clubes.

Deducir ahora los siguientes teoremas:

T1) Hay exactamente seis personas en S.

T2) Hay exactamente tres personas en cada club.

T3) Para cada persona de S hay exactamente otra persona en S que no es del mismo club.

EJEMPLO 4.

Considerar el siguiente conjunto de postulados respecto a ciertos objetos llamados abejas y ciertas colecciones de abejas llamadas colmenas.

P1) Toda colmena es una colección de abejas.

P2) Existen al menos dos abejas.

P3) Si p y q son dos abejas, entonces existe una y sólo una colmena que contiene tanto a p como a q.

P4) Si L es una colmena, entonces existe una abeja que no está en L.

P5) Dadas L (colmena) y p (abeja que no está en L), entonces existe una y sólo una colmena que contiene a p y que no contiene ninguna abeja que está en L.

(a) Deducir del conjunto de postulados los siguientes teoremas:

T1) Toda abeja está contenida en al menos dos colmenas.

T2) Toda colmena contiene al menos dos abejas.

T3) Existen al menos cuatro abejas distintas.

T4) Existen al menos seis colmenas distintas.

(b) Redactar de nuevo los postulados interpretando colmena como recta y abeja como punto. Obervar que P5 es ahora el postulado de las paralelas.

(c) Definir un kurple como tres abejas cualesquiera que no estén contenidas en la misma colmena. ¿Qué será un kurple en la interpretación de la parte (b)?

El siguiente problema tiene un planteamiento distinto pero en esencia se trata de una situación geométrica basada en unos axiomas.

EJEMPLO 5.

En una isla deshabitada, salvo por un grupo pequeño de ingleses, funcionan n clubes.

Observando las listas de socios, se verifica que:

a) Cada inglés es socio de exactamente dos clubes.

b) Cada dos clubes tienen exactamente un socio en común.

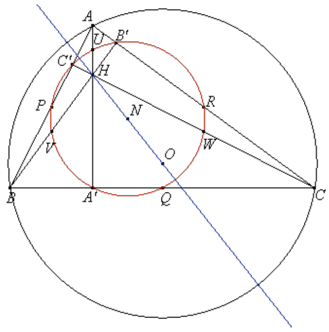
¿Cuántos ingleses hay en la isla?

Sugerencia. Representar cada persona por un segmento y cada club por un punto y observar que las condiciones dadas se verifican si se considera un polígono de n lados.

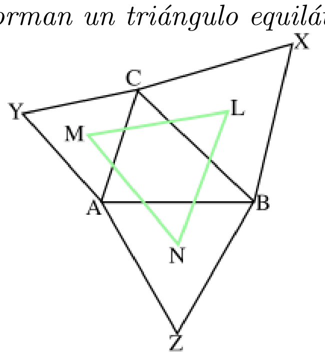
6. ALGUNOS TEOREMAS ELEGANTES.

Teorema de los nueve puntos. *Los puntos medios de los tres lados de un triángulo, los puntos medios de las rectas que van del ortocentro a los tres vértices y los pies de las alturas quedan en la misma circunferencia (circunferencia de Feuerbach).*

Se prueba también que el radio de esta circunferencia es la mitad del radio de la circunferencia circunscrita al triángulo.



Teorema de Napoleón. *Si sobre cada lado de un triángulo arbitrario se construyen sendos triángulos equiláteros (tanto hacia el exterior como hacia el interior del triángulo), los centros de gravedad de cada uno de ellos forman un triángulo equilátero.*



Este resultado tiene mucha relación con el llamado problema de Fermat, que consiste en encontrar un punto cuya suma de distancias a los tres vértices de un triángulo dado sea mínima.

La respuesta a este problema es el punto que al unirlo con los vértices forma ángulos iguales a 120°.

Una aplicación de este resultado es la siguiente:

Supongamos que cuatro ciudades se encuentran en los vértices de un cuadrado de un kilómetro de lado. Para comunicarse entre ellos disponen de un material que sólo sirve para $\sqrt{3}+1$ kilómetros de camino. ¿Cómo pueden hacerlo?

La respuesta está en determinar dos puntos en el interior del cuadrado de modo que las rectas que los unan con los vértices más próximos formen un ángulo de 120° con el segmento que une dichos puntos.

7. TEOREMA DE PITÁGORAS.

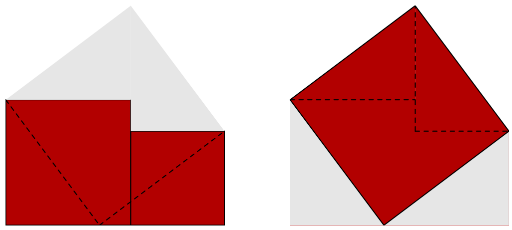
En todo triángulo rectángulo, el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos. El recíproco también es cierto.

Este teorema es fundamental en la Geometría Euclídea pues es la base para definir la distancia entre dos puntos. Aunque se atribuye a la escuela pitagórica, ya su enunciado aparece en ilustraciones babilónicas mucho más antiguas.

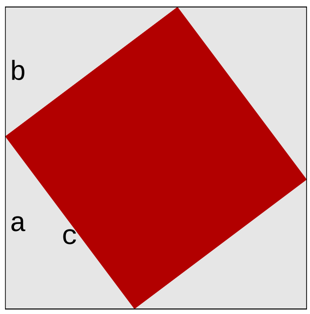
Se conocen más demostraciones de este teorema que días tiene un año, pero aquí nos limitaremos a indicar algunas de ellas, sobre todo por su claridad gráfica.

Demostraciones gráficas.

Demostración 1:

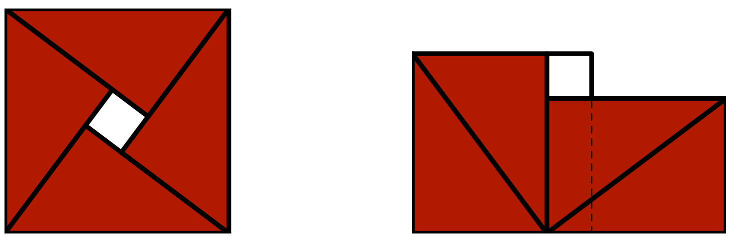


Demostración 2:

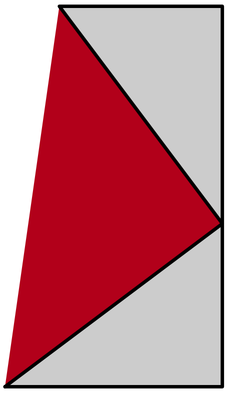


$$(a+b)^2 = 4 \cdot \frac{ab}{2} + c^2$$

Demostración 3:

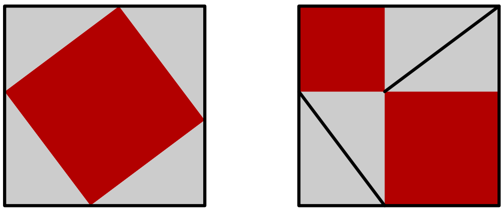


Demostración 4:

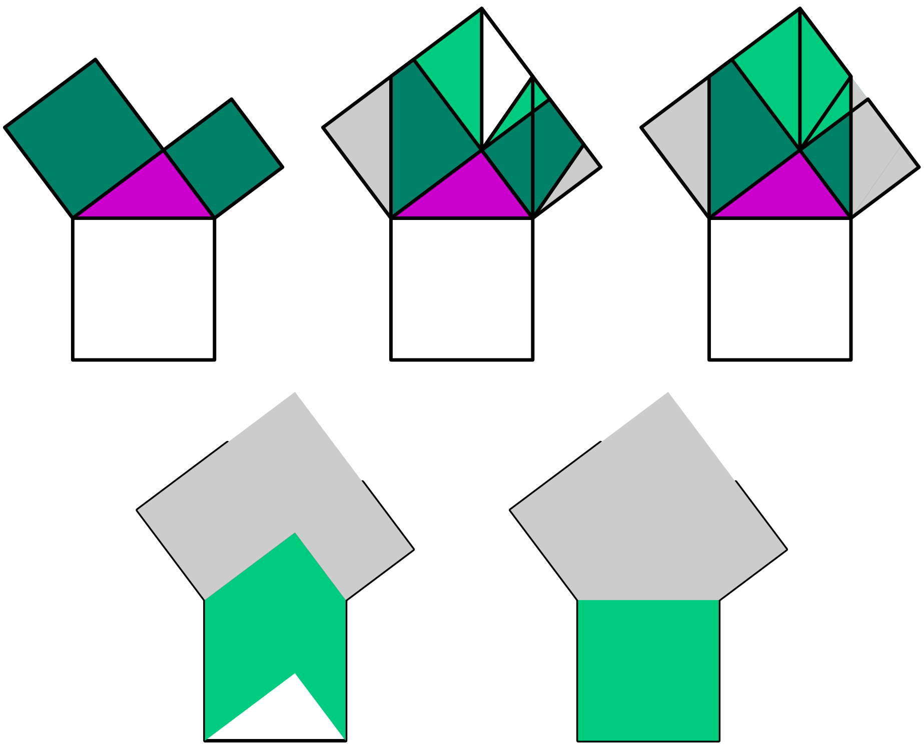


$$\frac{a+b}{2}\cdot(a+b)=2\cdot\frac{ab}{2}+\frac{c^2}{2}$$

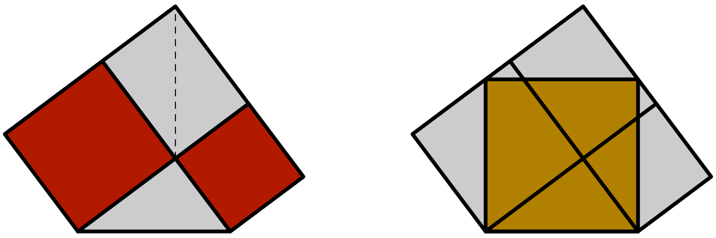
Demostración 5:



Demostración 6:



Demostración 7:

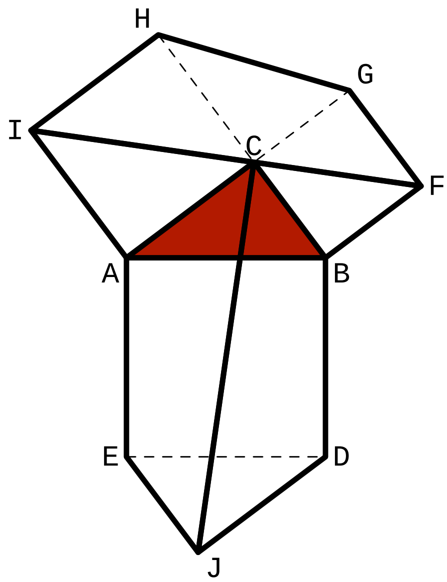


$$c^2 + 3 \cdot \frac{ab}{2} = a^2 + b^2 + 3 \cdot \frac{ab}{2}.$$

Demostración 8:

$$\begin{aligned} ACJE &\sim BCJD \\ &\sim AIFB \sim FGHI. \end{aligned}$$

Basta sumar las áreas de los dos primeros y las de los dos últimos.



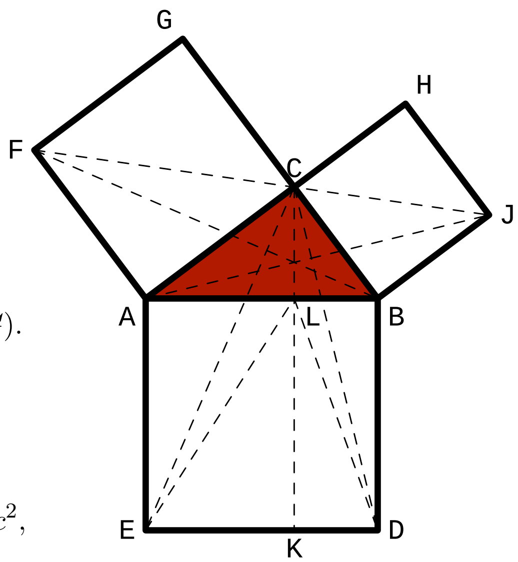
Demostración 9:

$$\begin{aligned} CAE &\sim FAB, \\ \text{área } (CAE) &= \text{área } (LAE), \\ \text{área } (FAB) &= \text{área } (FAC). \\ \text{Entonces, área } (LAE) &= \text{área } (FAC), \\ \text{área } (LAEK) &= \text{área } (FACG). \end{aligned}$$

Análogamente,

$$\text{área } (LBDK) = \text{área } (BCHJ).$$

Como área $(LAEK) +$ área $(LBDK) = c^2$, entonces $c^2 = a^2 + b^2$.



8. CONSECUENCIAS DEL TEOREMA DE PITÁGORAS.

1. Desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica.

$$\forall a, b \geq 0, \ \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

   En la demostración, basta construir un triángulo rectángulo cuya hipotenusa sea $(a+b)/2$ y un cateto sea $(a-b)/2$. Por el teorema de Pitágoras, el otro cateto será $\sqrt{ab}$.

2. En un triángulo cualquiera, la diferencia de los cuadrados de dos de sus lados es igual a la diferencia de los cuadrados de sus proyecciones sobre el tercer lado.

   Basta aplicar el teorema de Pitágoras en los dos triángulos rectángulos que se obtienen al trazar la altura correspondiente.

3. El postulado de las paralelas es equivalente al teorema de Pitágoras.

4. Si p es el semiperímetro de un triángulo de lados a, b y c, entonces el área es $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (fórmula de Herón).

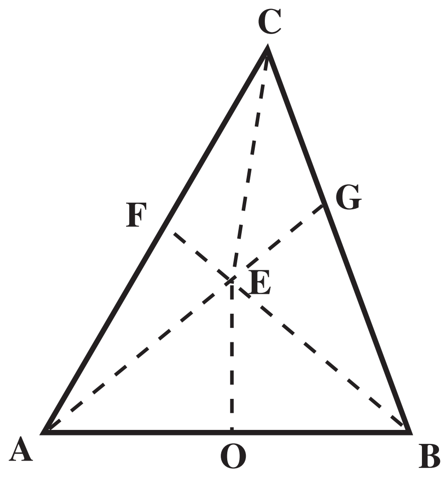
5. Si se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo como lados homólogos polígonos semejantes, el área del correspondiente a la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los correspondientes a los catetos.

   Esto permite, dadas dos figuras semejantes, construir una tercera, también semejante, con área igual a la suma o diferencia de ambas. (Observemos que este resultado es más general que el teorema de Pitágoras en sí, pero a su vez es consecuencia del mismo.)

   Observación. Las soluciones enteras de la ecuación $a^2+b^2=c^2$ se conocen con el nombre de ternas pitagóricas. Se pueden obtener con los valores $a=n^2-m^2$, $b=2mn$ y $c=n^2+m^2$, para cualesquiera n, m enteros $(n>m)$. Sin embargo, como se conoce desde hace poco, no hay soluciones enteras de la ecuación $a^n+b^n=c^n$ para $n>2$ (teorema de Fermat).

9. ERRORES EN LAS DEMOSTRACIONES GEOMÉTRICAS.

1. Todo triángulo es isósceles.



Sea CE la bisectriz del C y OE la mediatriz de AB.

Sean EF y EG las perpendiculares a AC y BC.

Los triángulos CFE y CGE son congruentes por ser rectángulos, ser iguales los ángulos FCE y GCE y ser CE la hipotenusa común.

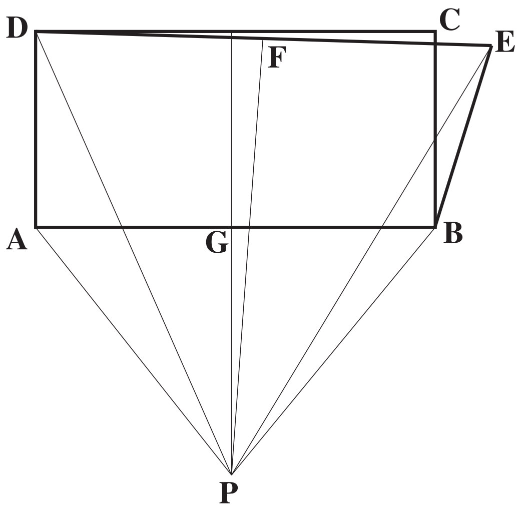
De aquí se deduce que $CF = CG$ y $EF = EG$.

Además, los triángulos EFA y EGB son también congruentes pues $EF = EG$, $EA = EB$ y ser ambos triángulos rectángulos.

De lo que se deduce que $FA = GB$.

Los dos resultados indican que $CA = CB$, es decir, el triángulo es isósceles.

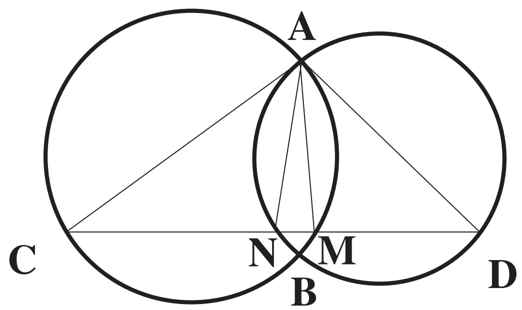
2. Un ángulo recto es igual a un ángulo obtuso.



Consideremos el rectángulo $ABCD$; construimos el segmento BE cuya longitud coincide con BC. Trazamos PG mediatriz de AB y PF mediatriz de DE. Por tanto, $PA = PB$ y $PD = PE$.

Con estos datos, es evidente que los triángulos PAD y PEB son congruentes. Esto indica que los ángulos PAD y PBE son iguales. Como también son iguales los ángulos PAB y PBA, se deduce que el ángulo (recto) BAD coincide con el ángulo (obtuso) ABE.

3. Desde un punto se pueden trazar dos perpendiculares a una misma recta.

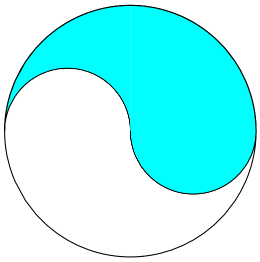


Sean A y B los puntos de intersección de dos circunferencias, AC y AD los diámetros respectivos y M y N los puntos donde CD corta a las circunferencias.

Los ángulos AMC y AND son rectos por estar inscritos en una semicircunferencia. Esto quiere decir que AN y AM son perpendiculares (distintas) a CD.

10. ALGUNOS PROBLEMAS GRÁFICOS.

1. **YIN-YAN.** El símbolo de la figura representa para las religiones antiguas los dos elementos opuestos que se complementan en la naturaleza: bien-mal, masculino-femenino, agua-fuego.

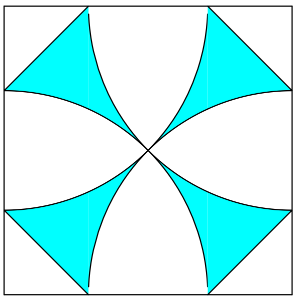


Si la línea que separa ambas partes son dos semicírculos, trazar una sola recta que divida en dos partes iguales las áreas de cada una.

Es un resultado general el hecho de que, dada una superficie cualquiera en el plano, siempre existe una recta que la divide en dos partes de la misma área. Esto es consecuencia del teorema de Bolzano, uno de los primeros resultados referentes a la continuidad de funciones reales. Incluso se puede probar que existen siempre dos rectas perpendiculares que la dividen en cuatro partes iguales. El resultado analítico no permite determinar cuáles son esas rectas pero métodos aproximados, que se incluyen en el cálculo numérico, permiten obtener de forma recursiva resultados con un grado de exactitud predeterminada.

2. **CRUZ DE MALTA.**

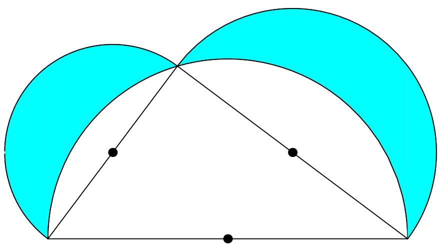
Calcular el área de la Cruz de Malta, siendo a el lado del cuadrado y los arcos de la circunferencia tienen centro en los vértices y pasan por el punto medio de las diagonales.



3. **LÚNULAS DE HIPÓCRATES.** Dado un triángulo rectángulo ABC, se trazan tres semicircunferencias de diámetros los tres lados. Entonces:

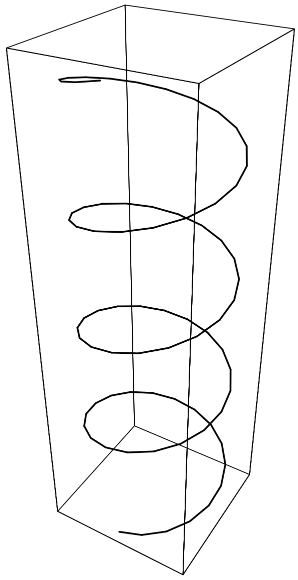
a) El área del semicírculo construido sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los semicírculos construidos sobre los catetos.

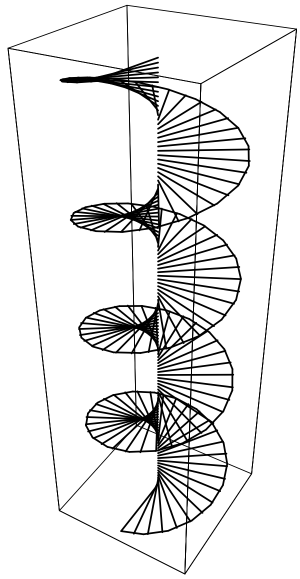
b) La suma de las áreas de las lúnulas de Hipócrates (región sombreada) es igual al área del triángulo.



11. GEODÉSICAS.

Es sabido que la línea recta es la distancia más corta entre dos puntos. Sin embargo, ya sabemos que eso sólo es cierto en la geometría plana. En otras situaciones existen mecanismos para determinar la distancia más corta. Por ejemplo, en la esfera son arcos de circunferencia máxima, y en el cilindro las hélices, como se comprueba dibujando una recta sobre una hoja de papel y enrollando esta para formar un cilindro. Las hélices son curvas muy importantes, como se pone de manifiesto al haber sido descubierto que las moléculas del ADN forman una doble hélice, y constituyen el código genético que dirige la transmisión hereditaria.





En la vida diaria las hélices tienen una aplicación más común: si proyectamos cada punto de una hélice sobre el eje de la misma, se obtiene la superficie llamada helicoide, también conocida como la espiral de Arquímedes, que sirve para hacer subir el agua o el grano. También se utiliza para hacer pasar la carne en las picadoras de los carniceros.

12. SÓLIDOS PLATÓNICOS.

Llamaremos poliedro a cualquier superficie compuesta por polígonos de modo que no haya más de dos polígonos por cada arista y las caras que convergen en cada vértice son polígonos unidos (dos consecutivos) por una arista (así evitamos dos figuras unidas por el vértice). Definimos un poliedro simple como el que puede deformarse de forma continua para convertirse en una esfera (no tiene agujeros).

Teorema de Euler. *Si denotamos por C el número de caras de un poliedro simple, A el número de aristas y V el número de vértices, en cualquier poliedro simple se verifica la relación $C - A + V = 2$.*

Este teorema fue demostrado por Descartes (1639) y redescubierto por Euler (1751). La demostración que incluímos aquí se debe a Cauchy (1811).

Demostración. Supongamos que se quita una cara del poliedro. El resto del poliedro lo podemos deformar hasta convertirlo en una figura plana de puntos y curvas cuya frontera corresponde a las aristas de la cara eliminada (basta para ello proyectarlo sobre un plano). Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que las aristas deformadas son segmentos de líneas rectas. Aunque la forma de las caras pueda ser distinta, el número de vértices, caras y aristas coincide con los del poliedro de partida (donde suponemos que la cara extraida corresponde al exterior de la figura).

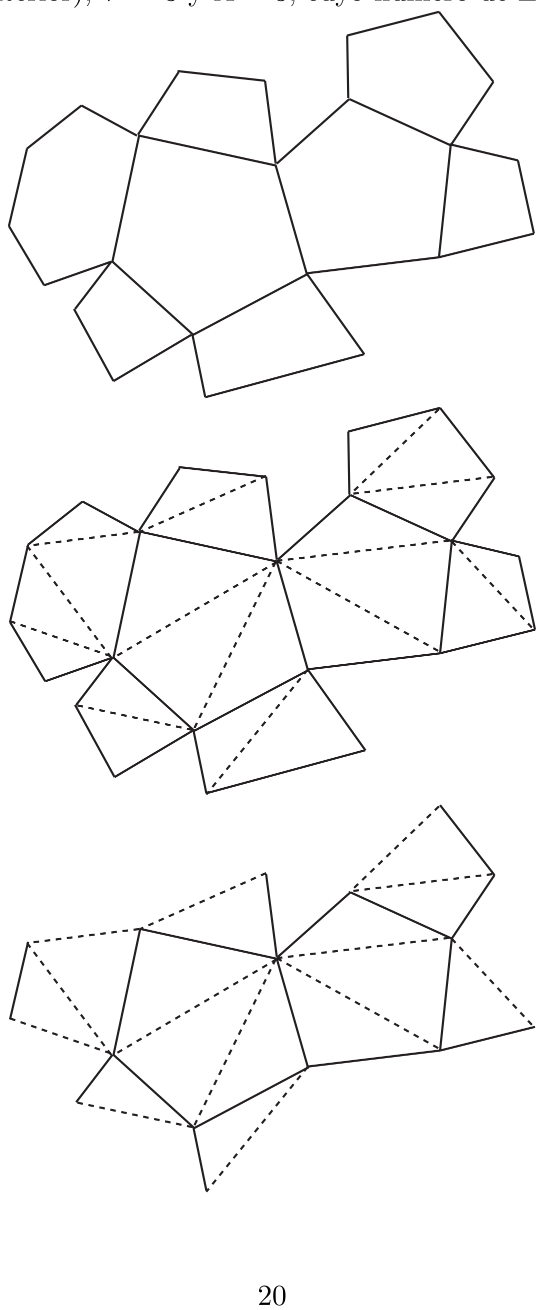
Aplicaremos a continuación de forma repetida las siguientes transformaciones que simplifican la figura pero no alteran el número de Euler $C - A + V$:

1. Si algún polígono tiene más de tres lados, dibujamos una diagonal. Esto añade una arista y una cara. Se continúa así hasta que todas las caras sean triangulares.

2. Eliminar de uno en uno todos los triángulos que tienen dos lados en contacto con el exterior de la figura. Esto elimina un vértice, dos aristas y una cara.

3. Eliminar de uno en uno los triángulos con un solo lado en contacto con el exterior. Esto disminuye el número de aristas y caras en una unidad pero no altera el número de vértices.

Aplicando sucesivas veces los pasos 2 y 3 quedará al final un solo triángulo. Ahora es evidente que $C = 2$ (contando el exterior), $V = 3$ y $A = 3$, cuyo número de Euler es 2.



Para el siguiente resultado diremos que un poliedro es convexo cuando, dado cualquier par de puntos en su interior, el segmento de recta que los une también está en su interior. (Si un poliedro es convexo, es simple, pero el recíproco no es cierto.)

Diremos también que un poliedro es regular si todas sus caras son polígonos regulares iguales y en cada vértice se encuentran el mismo número de caras.

El siguiente resultado ya era conocido en la Grecia antigua, de ahí que los poliedros regulares reciban también el nombre de sólidos platónicos. En "El Timeo"de Platón se puede leer lo siguiente:

A la Tierra le atribuimos ciertamente forma cúbica. Porque la Tierra es el más difícil de mover de todos los cuerpos y es de todos ellos el más tenaz. Por tanto, al atribuir esta superficie a la Tierra nos conformamos con lo razonable y lo verosímil. Y eso mismo hacemos al atribuir al agua a su alrededor la forma que es más fácil de mover (el icosaedro), lo más móvil es el fuego (el tetraedro), y la forma intermedia es para el aire (el octaedro).

TEOREMA. **Sólo existen cinco poliedros regulares convexos.**

Demostración. Utilizaremos la siguiente notación para denotar un poliedro:

Un poliedro convexo regular tiene símbolo (p, q) si las caras son polígonos de p lados y en cada vértice confluyen q aristas.

Así pues, como cada cara tiene p lados, el número total de aristas sería pC salvo que cada arista está contada dos veces (una por cada cara).

Es decir $pC = 2A$. Por otro lado, q aristas coinciden en cada vértice, de modo que, como cada arista conecta dos vértices, $qV = 2A$. Sustituyendo lo anterior en la fórmula de Euler, obtenemos

$$2A/p + 2A/q - A = 2 \text{ ó } 1/p + 1/q = 1/2 + 1/A.$$

Ahora bien, como todo polígono tiene necesariamente al menos tres lados y tres vértices, y p y q no pueden ser simultáneamente ambos mayores que 3 (pues la fórmula anterior como máximo sería $1/4 + 1/4 = 1/2 < 1/2 + 1/A$). Distinguiremos pues los dos casos:

a) $p = 3$: $1/q - 1/6 = 1/A$. Esto implica que q sólo puede ser 3, 4 ó 5. La ecuación anterior da los valores $A = 6, 12$ ó 30, respectivamente.

b) $q = 3$: Resultado análogo para p y A sólo puede tomar los valores 6, 12 ó 30.

En definitiva, las únicas posibilidades son las que se indican en la tabla siguiente:

Caras	**Aristas**	**Vértices**	**Símbolo**	**Nombre**
4	6	4	(3,3)	Tetraedro
8	12	6	(3,4)	Octaedro
20	30	12	(3,5)	Icosaedro
6	12	8	(4,3)	Exaedro
12	30	20	(5,3)	Dodecaedro

Otra prueba, más gráfica, consiste en observar que $q\alpha < 360$, donde α es el ángulo de cada polígono regular (en caso contrario, la figura degeneraría en un plano). Basta entonces observar la siguiente relación:

$$\begin{aligned} p = 3 &\implies \alpha = 60 \implies q = 3, 4 \text{ ó } 5, \\ p = 4 &\implies \alpha = 90 \implies q = 3, \\ p = 5 &\implies \alpha = 108 \implies q = 3, \\ p = 6 &\implies \alpha = 120. \end{aligned}$$

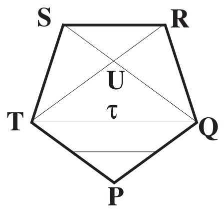
Se puede plantear y resolver una generalización de la fórmula de Euler a figuras en el espacio n-dimensional.

En un poliedro n-dimensional con N_0 vértices, N_1 aristas, N_2 caras, N_3 caras tridimensionales, etc., se verifica la fórmula de Schlafli:

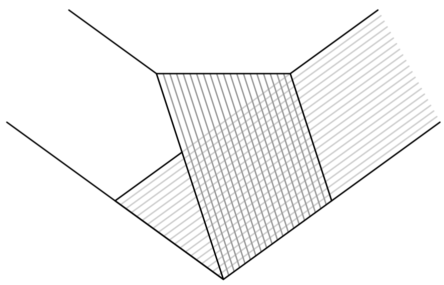
$$N_0 = -N_1 + N_2 - \cdots + (-1)^{n-1} N_{n-1} = 1 - (-1)^{n-1}.$$

13. RAZÓN ÁUREA.

Dado un pentágono de lado unidad, el segmento que une los puntos medios de dos lados consecutivos mide $\tau/2$, donde $\tau = 2 \operatorname{sen} 3\pi/10 = 2 \cos \pi/5$. De este modo, la longitud de las diagonales es τ.



Curiosidad: se puede fabricar un pentágono regular haciendo un nudo con una tira delgada de papel.



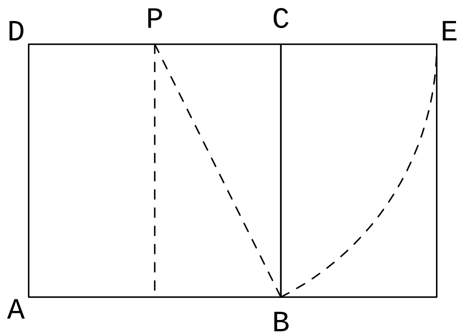
Si U es el punto de intersección de dos diagonales, estas quedan divididas según la llamada relación áurea o razón dorada. Concretamente:

$$\frac{QU}{US} = \frac{QT}{RS} = \tau = \frac{QS}{PT} = \frac{QS}{QU}.$$

Así, la razón entre la parte mayor y la menor de QS es igual a la razón entre toda la diagonal y la parte mayor.

Como $QU = 1$, entonces $1/US = \tau$ y $QS = \tau$; por tanto, $1 + \tau^{-1} = \tau$, de donde $\tau = (1 + \sqrt{5})/2$.

Una forma sencilla de construir un rectángulo cuyos lados verifiquen la relación áurea es la siguiente:



Dado un cuadrado $ABCD$, si P es el punto medio del segmento DC, trazamos la circunferencia de centro P y radio PB. De este modo, la razón $DE/AD = \tau$.

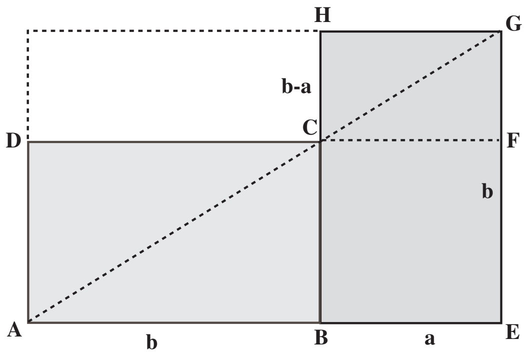
En efecto, si l es el lado del cuadrado y r el radio de la circunferencia,

$$r^2 = l^2 + l^2/4 = 5l^2/4.$$

Entonces $DE = DP + PE = l/2 + r = l/2(1+\sqrt{5})$. Como $AD = l$, $\dfrac{DE}{AD} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = \tau$.

Este rectángulo era considerado el más estético entre los artistas de la antigüedad y muchas obras se han realizado teniendo en cuenta estas proporciones. Un tratado clásico es el libro "De divina proportione.escrito por Luca Pacioli con ilustraciones de Leonardo da Vinci.

Para comprobar si un rectángulo verifica la relación dorada, como ocurre con las tarjetas de crédito o las hojas de papel, se colocan uno de ellos en vertical y otro en horizontal. Entonces la diagonal de uno de ellos al prolongarse debe pasar por el vértice opuesto del otro.



Por semejanza de triángulos, $a/b = b/(a+b)$, de donde:

$$\begin{aligned}
a^2 + ab &= b^2 \\
b^2 - a^2 - ab &= 0 \\
(b/a)^2 - (b/a) - 1 &= 0 \\
b/a &= \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} \\
b/a &= \frac{1+\sqrt{5}}{2}.
\end{aligned}$$

El rectángulo grande también verifica la relación áurea, y el mismo procedimiento permite obtener rectángulos cada vez más grandes con la misma proporción. Incluso el rectángulo pequeño $CFGH$ también la cumple (por la misma semejanza de triángulos).

Veamos la relación del número áureo con la sucesión de Fibonacci, es decir, la que verifica la relación de recurrencia $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ (una obra del Museo Guggenheim de Bilbao representa los primeros elementos de esta sucesión).

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} = 1 + \frac{1}{a_n/a_{n-1}}.$$

Si llamamos $x_n = a_n/a_{n-1}$, entonces

$$x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x_{n-1}}} = \cdots = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}.$$

Llamando L al límite de la sucesión x_n, tenemos:

$$L = 1 + 1/L \Longrightarrow L^2 - L - 1 = 0 \Longrightarrow L = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$