UNIDAD 5

PRODUCTOS Y COCIENTES NOTABLES

Objetivo general.

Al terminar esta unidad resolverás ejercicios en los que apliques los resultados de los productos y cocientes notables.

Objetivos específicos:

1. Recordarás a qué se llama productos y cocientes notables.
2. Memorizarás y aplicarás la regla para obtener el cuadrado de un binomio.
3. Memorizarás y aplicarás la regla para obtener el producto de la suma por la diferencia de dos cantidades.
4. Memorizarás y aplicarás la regla para obtener el cubo de un binomio.
5. Memorizarás y aplicarás la regla para obtener el producto de dos binomios con un término común.
6. Memorizarás y aplicarás las reglas para obtener el cociente de la diferencia de los cuadrados de dos cantidades entre la suma o la diferencia de las cantidades.
7. Memorizarás y aplicarás las reglas para obtener el cociente de fracciones cuyo numerador sea la suma o la diferencia de los cubos de dos cantidades, y el denominador la suma o la diferencia de las cantidades.

Objetivo 1. Recordarás a qué se llama productos y cocientes notables.

Algunos productos y cocientes de expresiones algebraicas con una estructura determinada aparecen con tanta frecuencia en el álgebra, que tienen un nombre especial: *productos notables* y *cocientes notables*, respectivamente. Estos términos hacen referencia a un procedimiento que puede ser sintetizado, obteniendo una multiplicación o una división abreviada que generalmente se efectúa por “visualización”.

Aun cuando el resultado se puede obtener de la multiplicación directa de los factores, o de la división usual del numerador entre el denominador, lo común, e indispensable, es que se memoricen los resultados y se ejerciten para adquirir la habilidad de reconocer estas formas matemáticas en una expresión algebraica y poder generalizarlas. Ambas destrezas permiten incrementar la rapidez en la operatividad algebraica.

En el caso de un binomio, es usual emplear las letras *a* y *b* para denotar al primero y al segundo término y representan tanto el signo como el coeficiente y la literal de cada término.

Objetivo 2. Memorizarás y aplicarás la regla para obtener el cuadrado de un binomio.

Dadas dos cantidades *a* y *b*, entre ellas sólo puede ocurrir que se sumen o que una se reste de la otra. En cada caso, su cuadrado es un producto notable.

a) Cuadrado de la suma de dos cantidades: $(a+b)^2$

Al efectuar la multiplicación indicada se obtiene

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2$$

de modo que

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Enunciar con palabras este resultado ayuda a memorizarlo:

“El cuadrado de la suma de dos cantidades cualesquiera es igual a la suma de los cuadrados de dichas cantidades más el doble de su producto”.

Siempre que se requiera elevar al cuadrado la suma de dos cantidades, el resultado puede obtenerse, sin necesidad de efectuar la multiplicación, con sólo aplicar la expresión anterior.

Ejemplos:

1.) Para evaluar $(x+2y)^2$ se aplica directamente la regla:

Los cuadrados de cada una de las dos cantidades son x^2, y $(2y)^2 = 4y^2$

El doble de su producto es $2(x)(2y) = 4xy$

Por lo tanto, el cuadrado del binomio es

$$x^2 + 4xy + 4y^2$$

2.) Para evaluar $\left(2a^2 + 3b\right)^2$ se aplica la regla:

Los cuadrados de las dos cantidades son $\left(2a^2\right)^2 = 4a^4$, y $(3b)^2 = 9b^2$

El doble de su producto es $2\left(2a^2\right)(3b) = 12a^2b$

El cuadrado del binomio es

$$4a^4 + 12ab^2 + 9b^2$$

b.) <u>Cuadrado de la diferencia de dos cantidades:</u> $(a-b)^2$

La multiplicación directa da el siguiente resultado:

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ab - b^2$$

por lo que

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Que, en palabras, es:

"El cuadrado de la diferencia de dos cantidades cualesquiera es igual a la suma de los cuadrados de dichas cantidades menos el doble de su producto"

Siempre que se eleve al cuadrado la diferencia de dos cantidades, se puede obtener directamente el resultado recordando la expresión anterior.

Ejemplos:

1.) Para evaluar $(8x-5y)^2$:

Los cuadrados de cada término son $(8x)^2 = 64x^2$, y $(5y)^2 = 25y^2$

El doble producto del primero y el segundo término es $2(8x)(5y) = 80xy$

Como la regla indica que a la suma del cuadrado de los dos términos, se <u>resta</u> el doble del producto de ambos, queda

$$(8x-5y)^2 = 64x^2 - 80xy + 25y^2$$

2.) Para evaluar $(-9a^3+6)^2$:

Como uno de los términos es positivo y el otro negativo, si se reacomodan los términos se obtiene

$$(-9a^3+6)^2 = (6-9a^3)^2$$

y la expresión se puede calcular como el cuadrado de la diferencia de un binomio:

Los cuadrados del primero y del segundo términos son $(6)^2 = 36$, y $(9a^3)^2 = 81a^6$

El doble producto de los dos términos, con signo negativo (para la resta) es $-2(6)(9a^3) = -108a^3$

por lo que el resultado es

$$(-9a^3+6)^2 = (6-9a^3)^2 = 36 - 108a^3 + 81a^6$$

o bien

$$(-9a^3+6)^2 = 81a^6 - 108a^3 + 36$$

Conviene observar que, en este ejemplo, el producto también se puede obtener con la regla para el cuadrado de la suma de un binomio de la siguiente manera:

Para evaluar $\left(-9a^3+6\right)^2$ como una suma:

Los cuadrados del primero y el segundo términos son: $\left(-9a^3\right)^2 = 81a^6$, y $\left(6\right)^2 = 36$

El doble producto de los dos términos es $2\left(6\right)\left(-9a^3\right) = -108a^3$

y, al aplicar la regla de la suma (la suma de los cuadrados de cada término más el doble del producto de ambos) queda:

$$\left(-9a^3+6\right)^2 = 81a^6 - 108a^3 + 36$$

puesto que al sumar $-108a^3$ se conserva el signo negativo de este término.

3.) Para evaluar $\left(-7-4p^3\right)^2$ se puede proceder de diferentes maneras:

Si se aplica la regla de la diferencia de un binomio se tiene que el primer término es -7 y el segundo término es $4p^3$, de modo que:

$$\begin{aligned}\left(-7-4p^3\right)^2 &= \left(-7\right)^2 - 2\left(-7\right)\left(4p^3\right) + \left(4p^3\right)^2 \\ &= 49 + 56p^3 + 16p^6\end{aligned}$$

También se puede aplicar la regla de la suma considerando al primer término como -7 y al segundo como $-4p^3$. En este caso queda

$$\begin{aligned}\left(-7-4p^3\right)^2 &= \left(-7\right)^2 + 2\left(-7\right)\left(-4p^3\right) + \left(-4p^3\right)^2 \\ &= 49 + 56p^3 + 16p^6\end{aligned}$$

Finalmente, se puede observar que

$$\left(-7-4p^3\right)^2 = \left[\left(-1\right)\left(7+4p^3\right)\right]^2$$

de modo que

$$\left(-7-4p^3\right)^2=\left(-1\right)^2\left(7+4p^3\right)^2=\left(7+4p^3\right)^2$$

y se puede comprobar que al desarrollar el cuadrado de este último binomio se obtiene el mismo resultado anterior.

Objetivo 3. Memorizarás y aplicarás la regla para obtener el producto de la suma por la diferencia de dos cantidades.

Los binomios $\left(a+b\right)$ y $\left(a-b\right)$ también se llaman *binomios conjugados* y la multiplicación directa de estos dos factores da por resultado

$$\left(a+b\right)\left(a-b\right)=a^2-ab+ab-b^2$$

de modo que

$$\left(a+b\right)\left(a-b\right)=a^2-b^2$$

Para memorizarla se expresa:

"La suma por la diferencia de dos cantidades es igual a la diferencia de sus cuadrados"

Debe tenerse en cuenta que, en el resultado, el cuadrado de la cantidad que se resta es aquélla que en un factor se suma y en el otro factor se resta.

Ejemplos:

1.) Para calcular $\left(a^x+b^y\right)\left(a^x-b^y\right)$, al aplicar la regla se tiene:

El cuadrado del primer término es $\left(a^x\right)^2=a^{2x}$

El cuadrado del segundo es $\left(b^y\right)^2=b^{2y}$

Y la diferencia de ambos cuadrados es $a^{2x}-b^{2y}$, por lo tanto

$$\left(a^x+b^y\right)\left(a^x-b^y\right)=a^{2x}-b^{2y}$$

2.) Para calcular $\left(x^2+\frac{1}{5}y\right)\left(x^2-\frac{1}{5}y\right)$

El cuadrado del primero es $\left(x^2\right)^2=x^4$ y el cuadrado del segundo es $\left(\frac{1}{5}y\right)^2=\frac{1}{25}y^2$, por lo que

$$\left(x^2+\frac{1}{5}y\right)\left(x^2-\frac{1}{5}y\right)=x^4-\frac{1}{25}y^2$$

3.) Para calcular $\left(11m^{\frac{1}{2}}+n^2p\right)\left(-n^2p+11m^{\frac{1}{2}}\right)$

se observa que el segundo binomio puede reescribirse para que la operación quede como

$$\left(11m^{\frac{1}{2}}+n^2p\right)\left(-n^2p+11m^{\frac{1}{2}}\right)=\left(11m^{\frac{1}{2}}+n^2p\right)\left(11m^{\frac{1}{2}}-n^2p\right)$$

con lo cual puede aplicarse la regla, y como la diferencia de los cuadrados de cada término es

$$\left(11m^{\frac{1}{2}}\right)^2-\left(n^2p\right)^2=121m-n^4p^2$$

Por tanto, resulta que

$$\left(11m^{\frac{1}{2}}+n^2p\right)\left(-n^2p+11m^{\frac{1}{2}}\right)=121m-n^4p^2$$

Objetivo 4. Memorizarás y aplicarás la regla para obtener el cubo de un binomio.

Obtener el cubo de un binomio es otra de las operaciones que se pueden efectuar como un producto notable y consiste en elevar a la tercera potencia la suma, o la diferencia, de dos cantidades: *a* y *b*.

a.) Cubo de la suma de dos cantidades: $(a+b)^3$

La multiplicación del binomio $(a+b)$ por sí mismo tres veces, da el siguiente resultado:

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)^2(a+b) = \left(a^2+2ab+b^2\right)(a+b)\\ &= a^3+a^2b+2a^2b+2ab^2+b^2a+b^3\\ &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\end{aligned}$$

Es decir que:

$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

Al observar los componentes de esta expresión algebraica la operación se puede describir con las siguientes palabras:

> *"El cubo de la suma de dos cantidades es igual a la suma de los cubos de cada término, más tres veces el cuadrado del primero por el segundo, más tres veces el primero por el cuadrado del segundo."*

Otras características en los términos de este producto que ayudan a memorizar el resultado de elevar a la tercera potencia la suma de dos cantidades son las siguientes:

1. El resultado es un polinomio de 4 términos, uno más que la potencia a la que está elevado el binomio.
2. El grado de cada uno de los términos del resultado es igual a 3.
3. Cada una de las cantidades, *a* y *b*, aparece elevada al cubo.
4. El coeficiente de los dos términos *mixtos* (los que contienen *a* y *b*) es 3.

Ejemplos:

1.) Para calcular el resultado de $(xy+6)^3$ se aplica la regla dada:

Los cubos de cada término son: $(xy)^3 = x^3y^3$, y $(6)^3 = 216$

Tres veces el cuadrado del primero por el segundo es: $3(xy)^2(6) = 18x^2y^2$

Tres veces el primero por el cuadrado del segundo es: $3(xy)(6)^2 = 108xy$

Estos son los cuatro términos del resultado, por lo que:

$$\left(xy+6\right)^3 = x^3y^3 + 18x^2y^2 + 108xy + 216$$

2.) Para calcular el resultado de $\left(2a^3b + a^2c\right)^3$, al aplicar la regla se tiene:

Los cubos de los dos sumandos: $\left(2a^3b\right)^3 = 8a^9b^3$, y $\left(a^2c\right)^3 = a^6c^3$

Tres veces el cuadrado del primero por el segundo: $3\left(2a^3b\right)^2\left(a^2c\right) = 12a^8b^2c$

Tres veces el primero por el cuadrado del segundo: $3\left(2a^3b\right)\left(a^2c\right)^2 = 6a^7bc^2$

El resultado es

$$\left(2a^3b + a^2c\right)^3 = 8a^9b^3 + 12a^8b^2c + 6a^7bc^2 + a^6c^3$$

3.) Para calcular el resultado de $\left(3m^2 + \frac{1}{9}m\right)^3$, siguiendo la regla:

Los cubos de los términos: $\left(3m^2\right)^3 = 27m^6$, y $\left(\frac{1}{9}m\right)^3 = \frac{1}{729}m^3$

El triple producto del cuadrado del primero por el segundo:

$$3\left(3m^2\right)^2\left(\frac{1}{9}m\right) = 3m^5$$

El triple producto del primero por el cuadrado del segundo:

$$3\left(3m^2\right)\left(\frac{1}{9}m\right)^2 = \frac{1}{9}m^4$$

Con estos cuatro términos el resultado es

$$\left(3m^2 + \frac{1}{9}m\right)^3 = 27m^6 + 3m^5 + \frac{1}{9}m^4 + \frac{1}{729}m^3$$

b.) <u>Cubo de la diferencia de dos cantidades:</u> $\left(a-b\right)^3$

$$\begin{aligned}\left(a-b\right)^3 &= \left(a-b\right)^2\left(a-b\right) = \left(a^2 - 2ab + b^2\right)\left(a-b\right)\\ &= a^3 - a^2b - 2a^2b + 2ab^2 + b^2a - b^3\\ &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3\end{aligned}$$

De modo que

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Comparando este resultado con el del cubo de la suma de *a* y *b*, se observa que sólo difieren en que el segundo y el cuarto término son negativos. Con palabras, esta expresión algebraica indica que:

> *"El cubo de la diferencia de dos cantidades es igual al cubo del primero, menos el triple producto del cuadrado del primero por el segundo, más el triple producto del primero por el cuadrado del segundo, menos el cubo del segundo"*

Por supuesto las cuatro condiciones mencionadas antes se siguen cumpliendo:

1. El resultado es un polinomio con un término más que la potencia a la que está elevado el binomio.
2. El grado de cada uno de los términos del resultado es igual a 3.
3. Cada una de las cantidades, *a* y *b*, cuya diferencia se eleva al cubo, aparece elevada a dicha potencia.
4. El coeficiente de los dos términos mixtos (los que contienen *a* y *b*) es 3.

Pero debe añadirse otra condición, que corresponde a los signos:

5. Los signos + y – se alternan en los cuatro términos del resultado, iniciando con el signo + para el cubo de la cantidad que tiene el signo positivo en el binomio (el minuendo).

Ejemplos:

1.) Para calcular $\left(x^2-1\right)^3$, siguiendo la regla dada:

Los cubos de los términos son: $\left(x^2\right)^3 = x^6$ y $(1)^3 = 1$

Tres veces el cuadrado del primero por el segundo es: $3\left(x^2\right)^2(1) = 3x^4$

Tres veces el primero por el cuadrado del segundo es: $3\left(x^2\right)(1)^2 = 3x^2$

Por ser una diferencia de términos, el cubo del binomio tendrá signos alternados iniciando con el signo (+) para el cubo del primer término del binomio, (–) para el triple producto del cuadrado del primero por el segundo, (+) para el triple del primero por el cuadrado del segundo y finalmente (–) para el cubo del segundo.

Por tanto, el resultado es:

$$\left(x^2 - 1\right)^3 = x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1$$

2.) Para calcular $\left(\frac{1}{3}r^2 - 3s\right)^3$, de acuerdo con la regla:

Los cubos de los dos términos, considerando que el primero será positivo y el último tendrá signo negativo:

$$\left(\frac{1}{3}r^2\right)^3 = \frac{1}{27}r^6 \text{ , y } -\left(3s\right)^3 = -27s^3$$

El triple producto del cuadrado del primero por el segundo, que tendrá signo (–) por ser el segundo término del resultado de la operación:

$$-3\left(\frac{1}{3}r^2\right)^2\left(3s\right) = -r^4 s$$

El triple producto del primero por el cuadrado del segundo, al que le corresponde signo (+):

$$+3\left(\frac{1}{3}r^2\right)\left(3s\right)^2 = +9r^2s^2$$

Por lo que el resultado final es

$$\left(\frac{1}{3}r^2 - 3s\right)^3 = \frac{1}{27}r^6 - r^4s + 9r^2s^2 - 27s^3$$

3.) Para calcular $\left(-4ac + b^2\right)^3$ se reescribe el binomio para tenerlo en la forma acostumbrada de minuendo menos sustraendo para dejar

$$\left(-4ac + b^2\right)^3 = \left(b^2 - 4ac\right)^3$$

por lo que el resultado será el cubo del primero menos tres veces el cuadrado del primero por el segundo más el triple del primero por el cuadrado del segundo, menos el cubo del segundo:

$$\left(-4ac+b^2\right)^3=\left(b^2-4ac\right)^3=\left(b^2\right)^3-3\left(b^2\right)^2(4ac)+3\left(b^2\right)(4ac)^2-(4ac)^3$$
$$=b^6-12ab^4c+48a^2b^2c^2-64a^3c^3$$

Es importante notar que al elevar al cuadrado un binomio:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2 \quad \text{ó} \quad (a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

también se cumplen características equivalentes a las que se mencionaron. Dado que la potencia es 2:

1. El resultado es un polinomio con tres términos, uno más que la potencia a la que está elevado el binomio.
2. El grado de cada uno de los términos del resultado es igual a 2.
3. Cada una de las cantidades, *a* y *b*, cuya suma, o diferencia, se eleva al cuadrado, aparece elevada a dicha potencia.
4. El coeficiente del término mixto en *a* y *b* es 2.

Y, en el caso de la diferencia, cuando el binomio es $(a-b)^2$:

5. Los signos (+) y (–) se alternan en los tres términos del resultado, iniciando con el signo (+) para el cuadrado de *a*, que es quien tiene el signo positivo en el binomio (el minuendo).

Objetivo 5. Memorizarás y aplicarás la regla para obtener el producto de dos binomios con un término común.

Dos binomios que tienen un término común son de la forma: $(x+a)$ y $(x+b)$, y su producto siempre tendrá la siguiente estructura:

$$(x+a)(x+b)=x^2+xb+xa+ab=x^2+(a+b)x+ab$$

de modo que se tiene otro producto notable:

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$$

Esta expresión algebraica puede memorizarse si se recuerda que

El producto de dos binomios con un término común es igual al cuadrado del término común, más el producto de la suma de los términos no comunes por el común, más el producto de los no comunes.

Ejemplos:

1.) Para calcular $(x+6)(x+11)$ según la regla dada:

El término común es x; su cuadrado es x^2

Los términos no comunes son 6 y 11; su suma por el término común es

$$(6+11)x=17x$$

El producto de los términos no comunes es $(6)(11)=66$

Entonces,

$$(x+6)(x+11)=x^2+17x+66$$

2.) Para calcular $(a^2+5)(a^2-2)$ de acuerdo con la regla:

Término común: a^2, cuadrado es $(a^2)^2=a^4$

Términos no comunes: 5 y -2; la suma de ambos por el término común es

$$[5+(-2)]\,a^2=3a^2$$

Producto de los términos no comunes: $(5)(-2)=-10$

Entonces

$$(a^2+5)(a^2-2)=a^4+3a^2-10$$

3.) Para calcular $\left(\sqrt{y}+x\right)\left(2+\sqrt{y}\right)$, al aplicar la regla se tiene

Termino común: $\sqrt{y}$: su cuadrado es $\left(\sqrt{y}\right)^{2}=y$

Términos no comunes: x y 2; la suma de ellos por el término común es

$$(x+2)\sqrt{y}=x\sqrt{y}+2\sqrt{y}$$

Producto de los términos no comunes: $(x)(2)=2x$

Por tanto

$$\left(\sqrt{y}+x\right)\left(2+\sqrt{y}\right)=y+x\sqrt{y}+2\sqrt{y}+2x$$

Como se ha visto, un producto notable de cada tipo es aplicable para números o expresiones representadas de formas muy diferentes, por lo que es necesario saber aplicarlos en cualquier caso, ya que la operación que se debe efectuar siempre es la misma.

Objetivo 6. Memorizarás y aplicarás las reglas para obtener el cociente de la diferencia de los cuadrados de dos cantidades entre la suma o la diferencia de las cantidades.

Como en el caso de los productos, existen algunas fracciones que tienen una expresión algebraica específica y que, por su frecuente aparición en los desarrollos algebraicos, es conveniente tener la habilidad de reconocer su estructura y memorizar el resultado a fin de anotar directamente la solución sin necesidad de efectuar la división.

Estas fracciones reciben el nombre de *cocientes notables*, debido a que se resuelven mediante una división algebraica abreviada que se realiza generalmente de manera visual.

Por supuesto que el resultado se puede obtener realizando la división indicada. Sin embargo, memorizar y aplicar directamente las reglas que dan la solución, incrementará significativamente la eficiencia en la operatividad algebraica.

Las fracciones más sencillas entre los cocientes notables son:

$$\frac{a^2-b^2}{a+b} \qquad \text{y} \qquad \frac{a^2-b^2}{a-b}$$

Si su cociente se obtiene realizando la división indicada en cada caso, se tiene:

$$\begin{array}{r}
a-b \\
a+b\,\overline{\big)\,a^2-b^2} \\
\underline{-a^2-ab} \\
-ab-b^2 \\
\underline{ab+b^2} \\
0
\end{array}
\qquad \text{y} \qquad
\begin{array}{r}
a+b \\
a-b\,\overline{\big)\,a^2-b^2} \\
\underline{-a^2+ab} \\
ab-b^2 \\
\underline{-ab+b^2} \\
0
\end{array}$$

Puesto que las divisiones son exactas, queda

$$\frac{a^2-b^2}{a+b}=a+b \qquad \text{y} \qquad \frac{a^2-b^2}{a-b}=a+b$$

Estos resultados se pueden recordar con mayor facilidad si se expresan con palabras:

La diferencia de los cuadrados de dos cantidades dividida por la suma de ellas es igual a la diferencia de las cantidades

y

La diferencia de los cuadrados de dos cantidades dividida por la diferencia de las mismas es igual a la suma de las cantidades.

Ejemplos:

1.) Para dividir $\dfrac{a^2b^2-a^6}{ab+a^3}$ lo primero que debe hacerse es observar la estructura de la fracción: el numerador es una diferencia de dos cantidades elevadas a potencias pares, 2 y 6, y el denominador es una suma.

El siguiente paso será inspeccionar si el numerador es la diferencia de los cuadrados de las cantidades que aparecen en la suma del denominador. Como

$$(ab)^2=a^2b^2, \quad \text{y} \quad (a^3)^2=a^6$$

se cumple esta condición y se tiene un cociente notable en el que la diferencia de los cuadrados de dos cantidades dividida por la suma de ellas es igual a la diferencia de las cantidades

Entonces:

$$\frac{a^2b^2-a^6}{ab+a^3}=ab-a^3$$

2.) Para dividir $\frac{25x^2-49y^2z^4}{5x-7yz^2}$, siguiendo el mismo procedimiento:

El numerador es una diferencia de términos que tienen potencias pares y cada término de la suma del denominador aparece en el numerador elevado al cuadrado puesto que:

$$(5x)^2=25x^2, \quad \text{y} \qquad (7yz^2)^2=49y^2z^4$$

Por lo tanto la fracción es la diferencia de los cuadrados de dos cantidades dividida por la diferencia de las mismas, y su cociente es la suma de las cantidades:

$$\frac{25x^2-49y^2z^4}{5x-7yz^2}=5x+7yz^2$$

3.) Para efectuar la división $\frac{100x^2-4x^2y^2}{30x^2-6x^2y}$ se puede observar que el numerador es una diferencia de cuadrados:

$$100x^2-4x^2y^2=(10x)^2-(2xy)^2$$

Pero el numerador no es ni la suma ni la diferencia de los cuadrados de los términos del denominador de modo que no se tiene un cociente notable.

Sin embargo, si se observa con cuidado, se puede ver que en el binomio del denominador hay un factor común que, al factorizarse, hace que el otro de los factores del denominador sea precisamente la diferencia de las cantidades que en el numerador están elevadas al cuadrado:

$$\frac{(10x)^2-(2xy)^2}{30x^2-6x^2y}=\frac{(10x)^2-(2xy)^2}{3x(10x-2xy)}$$

Expresado así el cociente, ya es posible aplicar la regla:

$$\begin{aligned}\frac{100x^2-4x^2y^2}{30x^2-6x^2y}&=\frac{(10x)^2-(2xy)^2}{3x(10x-2xy)}\\&=\frac{1}{3x}\left(\frac{(10x)^2-(2xy)^2}{10x-2xy}\right)\\&=\frac{1}{3x}(10x+2xy)\\&=\frac{10}{3}+\frac{2}{3}y\end{aligned}$$

En algunos casos es necesario trabajar un poco más para identificar la división indicada como un cociente notable. El trabajo invertido en ello vale la pena pues, si se logra hacerlo, se evita el efectuar la división completa, lo cual llevaría más tiempo. No existen reglas determinadas para esto, lo importante es desarrollar la habilidad de un manejo algebraico imaginativo y perseverante para determinar si lo que se tiene es, o no, una forma algebraica conocida.

Ejemplo:

1.) Para efectuar la división $\dfrac{x^4-x^2-2x-1}{x^2-x-1}$, se puede observar que el numerador tiene un término con potencia par y después tres términos que, de no ser por los signos, sería el desarrollo del cuadrado de un binomio; y lo será si se agrupan y se toma un signo negativo para la agrupación.

De esta manera el numerador puede reescribirse y el cociente quedará expresado como:

$$\frac{x^4-x^2-2x-1}{x^2-x-1}=\frac{x^4-(x^2+2x+1)}{x^2-x-1}$$

Ahora es más claro que el numerador es una diferencia de cuadrados

$$\frac{x^4 - x^2 - 2x - 1}{x^2 - x - 1} = \frac{\left(x^2\right)^2 - \left(x+1\right)^2}{x^2 - x - 1}$$

Y para visualizar que el denominador es la suma, o la diferencia, de las cantidades que aparecen elevadas al cuadrado en el numerador, se expresan los dos últimos términos como la suma (x + 1)

$$\frac{\left(x^2\right)^2 - \left(x+1\right)^2}{x^2 - x - 1} = \frac{\left(x^2\right)^2 - \left(x+1\right)^2}{x^2 - \left(x+1\right)}$$

Al aplicar la regla queda

$$\frac{\left(x^2\right)^2 - \left(x+1\right)^2}{x^2 - \left(x+1\right)} = x^2 + \left(x+1\right) = x^2 + x + 1$$

Entonces

$$\frac{x^4 - x^2 - 2x - 1}{x^2 - x - 1} = x^2 + x + 1$$

Las reglas correspondientes a estos cocientes notables también pueden utilizarse para encontrar el resultado de la suma o de la diferencia de dos cantidades dividida entre la diferencia de los cuadrados de esas mismas cantidades.

Puesto que

$$\frac{a+b}{a^2 - b^2} = \frac{1}{\dfrac{a^2 - b^2}{a+b}}$$

entonces

$$\frac{a+b}{a^2 - b^2} = \frac{1}{a-b}$$

y, en forma similar, como

$$\frac{a-b}{a^2-b^2}=\frac{1}{\dfrac{a^2-b^2}{a-b}}$$

queda

$$\frac{a-b}{a^2-b^2}=\frac{1}{a+b}$$

Ejemplo:

1.) Para dividir $\dfrac{a^2b+b^2}{a^4b^2-b^4}$ se observa que ahora el denominador es la diferencia de los cuadrados de los términos que aparecen en la suma del numerador

$$\frac{a^2b+b^2}{a^4b^2-b^4}=\frac{a^2b+b^2}{\left(a^2b\right)^2-\left(b^2\right)^2}$$

Por tanto

$$\frac{a^2b+b^2}{a^4b^2-b^4}=\frac{1}{a^2b-b^2}$$

Objetivo 7. Memorizarás y aplicarás las reglas para obtener el cociente de la suma o la diferencia de los cubos de dos cantidades entre la suma o la diferencia de las cantidades.

Además de los dos casos presentados anteriormente, existen otros cocientes que se pueden obtener directamente una vez que se han establecido los resultados generales que les corresponden. Aunque son varias las posibilidades de establecer estos cocientes notables, las reglas para determinarlos resultan ser, en la práctica, tan complicadas como efectuar la división en forma tradicional. Por ello, únicamente se presentan dos casos sencillos, que son los correspondientes a los cocientes:

$$\frac{a^3+b^3}{a+b} \quad \text{ó} \quad \frac{a^3-b^3}{a-b}$$

Al dividir el numerador entre el denominador del primer cociente se obtiene

$$
\begin{array}{r|l}
 & a^2 - ab + b^2 \\
\hline
a+b & a^3 + b^3 \\
 & \underline{-a^3 - a^2b} \\
 & \quad -a^2b + b^3 \\
 & \quad \underline{a^2b + ab^2} \\
 & \qquad ab^2 + b^3 \\
 & \qquad \underline{-ab^2 - b^3} \\
 & \qquad \quad 0
\end{array}
$$

Este resultado indica que

> *La suma de los cubos de dos cantidades dividida por la suma de las cantidades es igual a la suma de los cuadrados de cada cantidad menos el producto de ambas.*

Por otra parte, la división de la diferencia del cubo de dos cantidades entre la diferencia de las mismas, da el siguiente resultado:

$$
\begin{array}{r|l}
 & a^2 + ab + b^2 \\
\hline
a-b & a^3 - b^3 \\
 & \underline{-a^3 + a^2b} \\
 & \quad a^2b - b^3 \\
 & \quad \underline{-a^2b + ab^2} \\
 & \qquad ab^2 - b^3 \\
 & \qquad \underline{-ab^2 + b^3} \\
 & \qquad \quad 0
\end{array}
$$

Que, en palabras, se expresa como sigue:

> *La diferencia de los cubos de dos cantidades dividida por la diferencia de las cantidades, es igual a la suma de los cuadrados de cada cantidad más el producto de ambas.*

Ejemplos:

1.) Para obtener el cociente de $\dfrac{y^3+1}{y+1}$ se puede observar que los dos términos del numerador son los cubos de los términos que aparecen sumados en el denominador puesto que y^3 es el cubo de *y*, mientras que 1 es el cubo de 1.

Una vez identificado el caso como un cociente notable, se aplica la regla que dice que el resultado es igual a la suma de los cuadrados de las cantidades menos el producto de ellas.

Entonces,

$$\begin{aligned}\frac{y^3+1}{y+1} &= y^2-(y)(1)+1^2\\ &= y^2-y+1\end{aligned}$$

2.) Para obtener el cociente de $\dfrac{x^3-8x^6}{x-2x^2}$ se observa que los términos del denominador son *x* y $2x^2$, y los cubos de ellas son x^3 y $\left(2x^2\right)^3=8x^6$.

Entonces, el cociente propuesto es igual a la suma de los cuadrados de las cantidades más el producto de las cantidades:

$$\begin{aligned}\frac{x^3-8x^6}{x-2x^2} &= x^2+(x)\left(2x^2\right)+\left(2x^2\right)^2\\ &= x^2+2x^3+4x^4\end{aligned}$$

3.) Para el cociente $\dfrac{(x-y)^3-3xy(x-y)}{x-y}$ como en el segundo término no hay una potencia 3 para suponer a priori que es una diferencia de cubos, conviene hacer primero las operaciones indicadas en el numerador para determinar si corresponde o no, a un cociente notable.

Así,

$$\frac{(x-y)^3-3xy(y-x)}{x-y}=\frac{x^3-3x^2y+3xy^2-y^3-3xy^2+3x^2y}{x-y}$$

En el numerador existen términos semejantes y, al reducirlos, se obtiene la siguiente expresión:

$$\frac{x^3-3x^2y+3xy^2-y^3-3xy^2+3x^2y}{x-y}=\frac{x^3-y^3}{x-y}$$

Este cociente es inmediato al tomar la regla de la diferencia de cubos de dos cantidades entre la diferencia de las cantidades, por lo que

$$\frac{(x-y)^3-3xy(x-y)}{x-y}=\frac{x^3-y^3}{x-y}=x^2+xy+y^2$$

4.) Para el caso del cociente $\frac{5(a+25b)}{\sqrt[3]{5a}+5\sqrt[3]{b}}$, como en el ejemplo anterior, se debe hacer primero la operación en el numerador para eliminar el paréntesis:

$$\frac{5(a+25b)}{\sqrt[3]{5a}+5\sqrt[3]{b}}=\frac{5a+125b}{\sqrt[3]{5a}+5\sqrt[3]{b}}$$

Se observa que las raíces en el denominador son cúbicas, por lo que tendrá sentido determinar si las cantidades del numerador son los cubos de las cantidades del denominador.

En efecto, como

$$\left(\sqrt[3]{5a}\right)^3=5a \quad , \quad \text{y} \quad \left(5\sqrt[3]{b}\right)^3=125b$$

la condición se cumple y como numerador y denominador son una suma, el resultado será la suma de los cuadrados de las cantidades del denominador menos su producto:

$$\frac{5(a+25b)}{\sqrt[3]{5a}+5\sqrt[3]{b}} = \left(\sqrt[3]{5a}\right)^2 - \left(\sqrt[3]{5a}\right)\left(5\sqrt[3]{b}\right) + \left(5\sqrt[3]{b}\ \right)^2$$

$$= \sqrt[3]{\left(5a^2\right)} - 5\sqrt[3]{5ab} + 25\sqrt[3]{b^2}$$

$$= \sqrt[3]{25a^2} - 5\sqrt[3]{5ab} + 25\sqrt[3]{b^2}$$