

Nociones básicas - Álgebra

Ana María Beltrán
Docente Matemáticas

Febrero 4 de 2013

Definición 1. Expresión algebraica

A las expresiones compuestas por números y letras y las diferentes operaciones se les denomina **algebraicas**.

Ejemplo 1. *Los siguientes son ejemplos de expresiones algebraicas*

- xy
- $x + 500$
- $\frac{x}{3}$
- $x^2 + 7y - x$
- $(x - y)^3$
- $\frac{-7x^3y}{2xz}$

Definición 2. Término algebraico

Es la expresión algebraica que consta de un solo símbolo o varios símbolos no separados entre sí por los signos $+$ o $-$.

Por ejemplo, la expresión algebraica $2x^2 + 7xy - 28$ consta de tres términos: $2x^2$, $7xy$ y -28 . La parte numérica de cada uno se conoce como coeficiente y las letras forman la parte literal. El tercer término se llama independiente; es decir, no tiene parte literal y por tanto no depende de ésta.

Clasificación de las expresiones algebraicas

Las expresiones algebraicas que tienen un solo término con exponentes enteros positivos en las variables, se llaman *monomios*. Las expresiones que involucran suma o resta de monomios se llaman *polinomios*.

Dentro de los polinomios se encuentran los *binomios* (dos términos) y los *trinomios* (tres términos).

Nota 1. *Hay que tener en cuenta*

1. *Expresiones como: $-4x^2$, $\frac{1}{3}x^2$, $\sqrt{2}x^2$, $3x^2$ que son monomios con la misma parte literal, reciben el nombre de **términos semejantes**.*
2. *El grado de un monomio es la suma de los exponentes de la parte literal.*
3. *En un polinomio el término de mayor grado indica el grado de la expresión.*
4. *Las expresiones algebraicas se ordenan de acuerdo con una variable, de exponente mayor a exponente menor.*

Ejercicio 1. *Para practicar*

1. ¿Cuál es el grado de los siguientes monomios?

- $3x^2y^5$
- $-\frac{1}{2}x^3y^2$
- m^2n

2. Organice respecto a la variable x los siguientes polinomios.

- $-x^{m-2} + x^{m-1} + x^{m+1} + x^{m+2} - x^m + x^{m-3}$
- $x^5y^2 + x^3y^4 - y^7 - x^7 + xy^6$
- $x^4 + 2x - 5x^2 + 6x^3 + 8$

OPERACIONES BÁSICAS

Suma de polinomios

La **suma** de dos o más polinomios da como resultado un polinomio formado por la suma de los términos de cada polinomio. Cuando hay términos semejantes, hacemos reducción de tales términos.

Ejemplo 2. *Sumemos los polinomios*

$$p(x, y) = 3x^2y + 2xy + 4xy^2 \quad y \quad q(x, y) = 4x^2y + 3x + 5$$

$$\begin{aligned} p(x) + q(x, y) &= 3x^2y + 2xy + 4xy^2 + 4x^2y + 3x + 5 \\ &= 7x^2y + 2xy + 4xy^2 + 3x + 5 \end{aligned}$$

pues se suman los dos términos semejantes

Ejercicio 2. *Realice las siguientes adiciones de polinomios*

- $3a^2 - 2a$ y $a^2 + 1$
- $x^2 - 4x$; $-7x + 6$ y $3x^2 - 5$
- $x^2y + 7xy^2 - 8xy + 1$ y $-4x^2y + 5xy - 2x + y^3 - 4$
- $10x^2 - 8x + 5$ y $2x^2 + 9x - 10$
- $3x^2 + 3x + 3$ y $5x^2 - 2x - 3$

Sustracción de polinomios

La **diferencia** de dos polinomios se obtiene adicionando al minuendo el opuesto del sustraendo.

Nota 2. *El opuesto de un polinomio es el polinomio que tiene los mismos términos pero con signos opuestos.*

Ejemplo 3. *Calculemos la siguiente diferencia:*

$$t(x) = (3x^2 + 7x + 2) - (x^2 + 2x + 1)$$

$$\begin{aligned} t(x) &= 3x^2 + 7x + 2 + \underbrace{(-x^2 - 2x - 1)}_{\text{opuesto del sustraendo}} \\ &= 3x^2 + 7x + 2 - x^2 - 2x - 1 \\ &= (3x^2 - x^2) + (7x - 2x) + (2 - 1) = 2x^2 + 5x + 1 \end{aligned}$$

Ejercicio 3. *Calcular las siguientes diferencias:*

(a) $(3x^2 - 8x - 5) - (3x^2 - 12x - 2)$

(b) $(5x^2 - 5) - (5x^2 - 4x - 2)$

(c) $(-x + y - z) - (x + 3y - 6z)$

Multiplicación de expresiones algebraicas

- El producto de dos o más monomios se obtiene multiplicando los coeficientes entre sí. Luego se multiplican los literales aplicando la ley de los exponentes para potencias de igual base.
- La multiplicación de un monomio por un polinomio se realiza multiplicando el monomio por cada uno de los términos del polinomio.
- Para multiplicar dos polinomios multiplicamos cada término de un polinomio por cada término del otro. Luego adicionamos los resultados.

Ejemplo 4. *Veamos un ejemplo de cada caso*

• $(4x^3y)(-3x^2yz^3)$

$$\begin{aligned} (4x^3y)(-3x^2yz^3) &= (4 \cdot (-3))(x^3 \cdot x^2)(y \cdot y)(z^3) \\ &= -12x^5y^2z^3 \end{aligned}$$

• $2x(3x - 5x^2y)$

$$\begin{aligned} 2x(3x - 5x^2y) &= (2x)(3x) - (2x)(5x^2y) \\ &= 6x^2 - 10x^3y \end{aligned}$$

• $(2x + y)(3y - 4)$

$$\begin{aligned} (2x + y)(3y - 4) &= 2x(3y - 4) + y(3y - 4) \\ &= (2x)(3y) - (2x)(4) + (y)(3y) - (y)(4) \\ &= 6xy - 8x + 3y^2 - 4y \end{aligned}$$

Ejercicio 4. *Efectúe los siguientes productos*

(a) $(2x^2 + 3xy - 5y^2)(8x + 5 - 3y^2 - 8x^2)$

$$(b) (x^2 - 2xy + y^2)(x - y)$$

$$(c) (7x - 2y)(x^2 + 5xy)$$

División de monomios

- Al dividir un monomio entre otro monomio, se obtiene una expresión cuyo factor numérico es el cociente de los coeficientes de los monomios y la parte literal es el cociente de las variables de los monomios, aplicando las leyes de la potenciación. Cuando en la expresión resultante todos los exponentes de las variables son positivos, se obtiene un monomio.

Ejemplo 5.

$$\frac{36x^5y^9}{9x^3y^4} = 4x^{5-3}y^{9-4} = 4x^2y^5$$

Ejercicio 5. Realizar las siguientes divisiones

$$\frac{5a^2b^4c^3}{3ab^2}; \quad \frac{4x^3y^5z}{8xyz}; \quad \frac{-6m^3n^2}{mn^4}$$

- Para dividir un *polinomio entre un monomio* se divide cada término del polinomio por el monomio y se adicionan los cocientes parciales.

Ejemplo 6. Algunas muestras

– El polinomio es divisible por el monomio.

$$\begin{aligned} \frac{8x^3 - 15x^2 + 3x}{3x} &= \frac{8x^3}{3x} - \frac{15x^2}{3x} + \frac{3x}{3x} \\ &= \frac{8}{3}x^2 - 5x + 1 \end{aligned}$$

– El polinomio no es divisible por el monomio.

$$\begin{aligned} \frac{14x^4 - 3x^2 - 8x}{2x^2} &= \frac{14x^4}{2x^2} - \frac{3x^2}{2x^2} - \frac{8x}{2x^2} \\ &= 7x^2 - \frac{3}{2} - \frac{4}{x} \end{aligned}$$

Ejercicio 6. Resuelva las siguientes divisiones

1. $\frac{3x^4 - 6x^3 + 15x^2}{3x^2}$

2. $\frac{20x^5 - 8x^3 - 24x}{4x}$

3. $\frac{-2x^4y^3 + 3x^3y^2 - 2x^2y}{xy}$

4. $\frac{6x^4 + 9x^3 + 30x^2}{-3x^2}$

5. $\frac{-14x^3y + 10x^4y - 18x^6y^2}{-2xy}$