UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
SEDE MEDELLÍN

NOCIONES DE TRIGONOMETRÍA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA

Autores

John Bayron Baena G.
Eddye Alejandro Bustamante M.
Daniel Cabarcas J.
Oscar Iván Giraldo G.
José Manuel Jiménez U.
Blanca Aurora León I.
Bibiana López R.
Mauricio Andrés Osorio L.
Carlos Augusto Vélez L.
Beatriz Villa

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

SEDE MEDELLÍN

Tabla de Contenido

Lección **Página**

Página

Prólogo

En nuestra labor docente encontramos con frecuencia estudiantes con dificultades para desempeñarse exitosamente en sus estudios en la universidad. Creemos esto se debe en parte a deficiencias en el manejo conceptual y la capacidad operativa en diversos temas de la matemática, los cuales a pesar de estar incluidos en los programas académicos de la educación básica y media aún no se han logrado desarrollar en forma adecuada. A pesar de los esfuerzos institucionales, se evidencian grandes diferencias en la formación matemática de los estudiantes al llegar a la universidad.

Desde nuestra experiencia como profesores pensamos que hay dos aspectos centrales que pueden contribuir a desarrollar la formación matemática de los estudiantes en el nivel medio: de un lado la presentación de los temas en cursos diseñados coherentemente, con la utilización de un lenguaje matemático preciso, aunque sencillo y del otro, el desarrollo de actividades que familiaricen a los estudiantes con la práctica habitual de las matemáticas. A partir de estas premisas nos hemos comprometido en la escritura de estas lecciones de Trigonometría. Esperamos que este curso contribuya a que los estudiantes desarrollen hábitos de razonamiento lógico y sistemático, al mismo tiempo que fortalezca una metodología de estudio que les facilite el aprendizaje autónomo.

Este trabajo está dividido en 11 lecciones y 6 talleres. En cada una de las lecciones de ellas se presentan los conceptos y ejemplos que facilitan la exposición en clase. Además para contribuir a la comprensión de los temas tratados, hemos diseñado numerosos ejercicios en los talleres, los cuales implican la aplicación del material incluido en las lecciones. Estamos seguras de que el compromiso activo es la forma más efectiva para apropiarse de los conceptos presentados.

El material se ha organizado de tal forma que se compagine con el propósito central del curso. Partimos del desarrollo de la trigonometría en los triángulos rectángulos, estudiando las relaciones trigonométricas y algunas de sus aplicaciones; esto tiene la ventaja de que se apela directamente a la experiencia de los estudiantes en su curso de geometría. Luego estudiamos las funciones trigonométricas definidas sobre ángulos orientados en posición canónica, para finalmente presentar las funciones trigonométricas en el ámbito de las funciones cuyo dominio son subconjuntos de números reales. Esto les permite a los estudiantes desarrollar temas que van desde los que les son familiares, como los triángulos rectángulos, para terminar al final del curso discutiendo sobre el dominio y rango de las funciones trigonométricas, análisis de sus gráficas y solución de ecuaciones trigonométricas.

Esperamos que estas lecciones, escritas en el marco del *Plan de mejoramiento de la enseñanza y apropiación de las Matemáticas en los colegios de Antioquia* sean de utilidad para los docentes y estudiantes y que contribuyan a los propósitos de este plan.

Las autoras

Lección 1

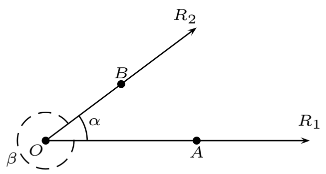
Ángulos

En esta lección presentaremos muy brevemente los conceptos básicos de la geometría necesarios para la mejor comprensión del curso. También iniciaremos el estudio de la trigonometría a partir del teorema de Pitágoras y definiremos las relaciones trigonométricas de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo y sus relaciones recíprocas.

Ángulo es la abertura formada por dos rayos (o semirrectas) que tienen un origen común, llamado ***vértice*** del ángulo . Cada uno de los rayos R_1 y R_2 se denomina ***lado del ángulo***. Se utilizan varias notaciones para los ángulos. Las más comunes son:

- $\angle AOB$, en términos de las semirrectas OA y OB. También puede utilizarse $\angle BOA$.
- Con frecuencia se utiliza una única letra, la cual puede ser una letra minúscula a, b, c, ... o también una letra griega como α (alfa), β (beta), γ (gamma), δ (delta), φ (fi),..., para representar el ángulo y para representar su medida.
- También se utilizará el vértice O para denotar el ángulo.

Dos rayos R_1 y R_2 que tienen un origen común O dan lugar a dos ángulos (α y β) como se puede ver en la figura 1.1. El ángulo queda plenamente identificado a partir de condiciones adicionales.



Ángulos α y β

Figura 1.1

Medida de ángulos

Medir un ángulo es compararlo con otro que se toma como unidad. Utilizaremos dos unidades de medida: el ***grado sexagesimal*** y el ***radián***.

Sistema sexagesimal

Consideramos una circunferencia de centro O dividida en 360 partes iguales. Si unimos cada una de estas 360 divisiones con el centro O, se forman 360 ángulos. Un ángulo mide un grado, escrito $1°$, si tiene su vértice en el centro O y sus lados cortan dos divisiones sucesivas de la circunferencia. De acuerdo con esta definición el ángulo que corresponde a una rotación completa alrededor del vértice O mide $360°$.

Para medir ángulos se utiliza el transportador. En el transportador, que se presenta en la figura 1.2 se aprecian las 180 divisiones de una ***semicircunferencia***. el ángulo α que forman los rayos R_1 y R_2 es un ángulo de $55°$.

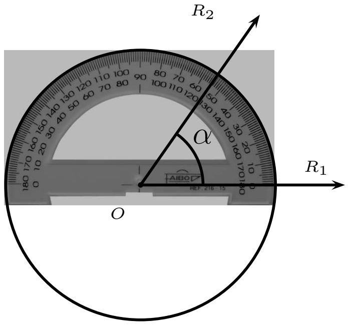


Figura 1.2

Sistema circular

En este sistema para medir ángulos, se utiliza como unidad de medida el *radián*, denotado 1 rad. Consideremos una circunferencia con centro en el punto O y radio r. Un radián es un ángulo con vértice en O y cuyos lados son dos radios de la circunferencia que determinan un arco cuya longitud es igual al radio r de la circunferencia.

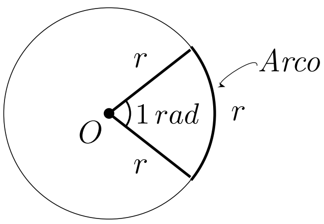


Figura 1.3

Como la longitud de una circunferencia es igual a $2\pi r$, el ángulo de $360°$ vale 2π radianes, es decir aproximadamente 6.28 radianes. De esta relación son inmediatas las siguientes expresiones:

$$1\,rad = \frac{360\,°}{2\pi} = \frac{180\,°}{\pi} \approx 57.32°,$$
$$1° = \frac{2\pi}{360}\,rad = \frac{\pi}{180}\,rad.$$

Ejemplo 1.1

1. El ángulo α mide $30°$. Encuentre su medida en radianes.

$$30° = 30 \cdot \frac{\pi}{180} rad = \frac{\pi}{6} rad.$$

   Entonces el ángulo α mide $\frac{\pi}{6} rad$.

2. El ángulo a mide π radianes. Encuentre su medida en grados y represente geométricamente al ángulo a.

$\pi\, rad = \pi \cdot \frac{180\,°}{\pi} = 180°$,
el ángulo a mide $180°$.

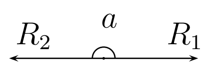


Figura 1.4

Clasificación de los ángulos según su medida

- **Ángulo nulo.** Es el ángulo que mide $0°$.
- **Ángulo agudo.** Es el ángulo que mide más de $0°$ y menos de $90°$.
- **Ángulo recto.** Es el ángulo que mide exactamente $90°$.
- **Ángulo obtuso.** Es el ángulo que mide más de $90°$ y menos de $180°$.
- **Ángulo llano.** Es el ángulo que mide $180°$.

Figura 1.5

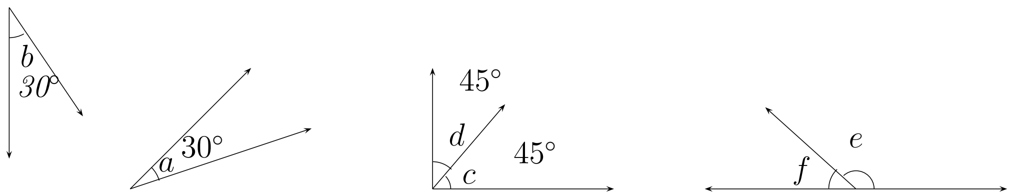
Relaciones entre ángulos

- **Ángulos congruentes:** decimos que dos ángulos son ***congruentes*** si tienen la misma medida. Si los ángulos α y β son congruentes escribimos $\alpha \cong \beta$.
- **Ángulos complementarios:** dos ángulos son ***complementarios*** si la suma de sus medidas es $90°$.
- **Ángulos suplementarios:** dos ángulos son ***suplementarios*** si la suma de sus medidas es $180°$.

Si dos ángulos α y β son complementarios, decimos que α es el ángulo complementario de β. Similarmente si dos ángulos α y β son suplementarios decimos que α es el ángulo suplementario de β.

Ejemplo 1.2

Los ángulos a y b que aparecen en la figura 1.6 son congruentes; los ángulos c y d son complementarios y los ángulos e y f son suplementarios.



Ángulos congruentes *Ángulos complementarios* *Ángulos suplementarios*

Figura 1.6

Notación. Con el propósito de simplificar la escritura utilizaremos la misma notación para representar tanto el ángulo como su medida. El texto completo nos va a permitir interpretar correctamente en que sentido se utilizan los símbolos. Por ejemplo escribimos $a = b$ para significar que la medida del ángulo a es igual a la medida del ángulo b. También podremos escribir $a + b = 180°$, para indicar que la suma de las medidas de los ángulos a y b en **grados** es 180°. La afirmación $c + d = \frac{\pi}{2}$ rad, indica que la suma de las medidas de los ángulos c y d en **radianes** es $\frac{\pi}{2}$ radianes.

Ejemplo 1.3

1. Dados los siguientes ángulos, encontremos sus ángulos complememtarios

   (a) 45° R. 45°. Solución: $90° - 45° = 45°$.

   (b) 30° R. 60°. Solución: $90° - 30° = 60°$.

   (c) $\dfrac{\pi}{6}$ rad R. $\dfrac{\pi}{3}$ rad. Solución: $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{3\pi - \pi}{6} = \dfrac{2\pi}{6} = \dfrac{\pi}{3}$.

2. Dados los siguientes ángulos, encontremos sus ángulos suplementarios.

   (a) 45° R. 135°. Solución: $180° - 45° = 135°$.

   (b) 90° R. 90°. Solución: $180° - 90° = 90°$.

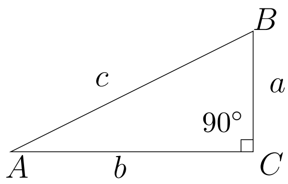
   (c) $\dfrac{2\pi}{3}$ rad R. $\dfrac{\pi}{3}$ rad. Solución: $\pi - \dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{3\pi - 2\pi}{3} = \dfrac{\pi}{3}$.

Teorema de Pitágoras

La trigonometría se inició con el estudio de las relaciones entre los lados y ángulos de un triángulo rectángulo. Una de las relaciones ya conocidas es la que existe entre la longitud de los catetos y la de la hipotenusa. Recordemos el teorema que describe dicha relación.

Teorema de Pitágoras.

En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos.



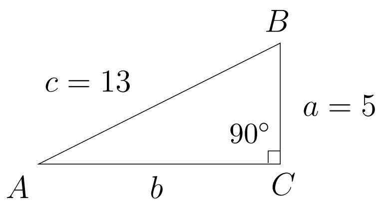
$$\boxed{a^2 + b^2 = c^2.}$$

Figura 1.7

Ejemplo 1.4

1. En un triángulo rectángulo uno de sus catetos mide 5 cm y la hipotenusa 13 cm. Encontremos la longitud del otro cateto.

   Solución
   Aplicamos el teorema de Pitágoras. Representemos por c la longitud de la hipotenusa y las longitudes de los catetos por a y b.

   $$13^2 = 5^2 + b^2,$$
   $$169 = 25 + b^2,$$
   $$169 - 25 = b^2,$$
   $$b^2 = 144,$$
   $$\boxed{b = 12\ cm.}$$

   Figura 1.8

2. Juan recorre la siguiente trayectoria desde un punto O: camina 8 km al norte, 3 km al oeste, 7 km al norte y por último 11 km al este. ¿A qué distancia está del punto de partida?

   Solución
   Describimos la trayectoria que siguió Juan. Véase la figura 1.9. Debemos calcular la longitud d del segmento de recta $\overline{OQ}$; el triángulo ΔODQ es rectángulo y la longitud de su hipotenusa es d; la longitud de uno de sus catetos es $m + n$ y la del otro es b, como observamos en la figura 1.9.

   $$m + n = 15, \qquad b = 8.$$

   Por el teorema de Pitágoras:

   $$d^2 = 8^2 + 15^2 \quad = 64 + 225 \quad = 289,$$

$$d = \sqrt{289} = 17 \text{ km}.$$

R. Juan se encuentra a 17 km del punto de partida.

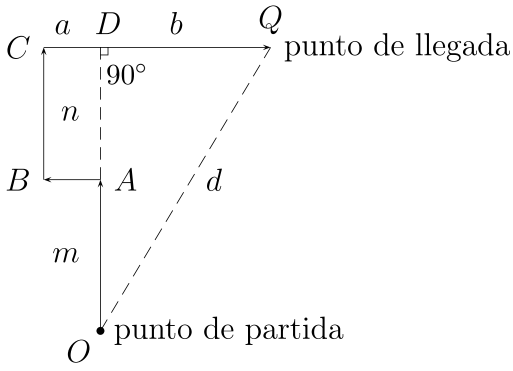
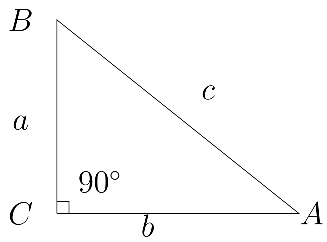


Figura 1.9

Relaciones trigonométricas de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo

A continuación vamos a definir las relaciones ***seno***, ***coseno***, ***tangente***, ***cotangente***, ***secante*** y ***cosecante***, de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo, como razones entre las medidas de sus lados; por simplicidad denotaremos estas relaciones para el ángulo agudo A por: $\operatorname{sen} A$, $\cos A$, $\tan A$, $\cot A$, $\sec A$ y $\csc A$, respectivamente. Para las definiciones se da un nombre especial a los catetos teniendo en cuenta su ubicación con respecto a cada ángulo.



a es el cateto opuesto del ángulo A,

b es el cateto adyacente del ángulo A.

c es la hipotenusa del triángulo rectángulo

Figura 1.10

Definiremos estas relaciones por

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} A &= \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{c}, & \cos A &= \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c}, \\
\tan A &= \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{a}{b}, & \cot A &= \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{b}{a}, \\
\sec A &= \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{c}{b}, & \csc A &= \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{c}{a}.
\end{aligned}$$

De acuerdo con esta definición son claras las siguientes igualdades, conocidas comúnmente como ***identidades recíprocas:***

$$\operatorname{sen} A = \frac{1}{\csc A}, \quad \cos A = \frac{1}{\sec A}, \quad \tan A = \frac{1}{\cot A}.$$

OBSERVACIÓN: en el triángulo ACB, de la figura 10.1, podemos determinar las funciones trigonométricas del ángulo B y obtenemos

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} B &= \frac{b}{c}, & \csc B &= \frac{c}{b}, \\ \cos B &= \frac{a}{c}, & \sec B &= \frac{c}{a}, \\ \tan B &= \frac{b}{a}, & \cot B &= \frac{a}{b}. \end{aligned}$$

Si comparamos estas expresiones con las definiciones dadas para el ángulo A, observamos que $\operatorname{sen} B = \cos A$, $\cos B = \operatorname{sen} A$, $tanB = cotA$. Igualmente se verifica que $\cot B = \tan A$, $\sec B = \csc A$ y $\csc B = \sec A$. Los pares de funciones que aparecen en cada una de las igualdades anteriores se denominan ***cofunciones***. Por ejemplo se dice que las funciones seno y coseno son cofunciones.

Recordemos que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180°. Puesto que el ángulo C mide 90°, la suma de las medidas del ángulo A y el ángulo B es igual a 90°, lo cual implica que A y B son ángulos ***complementarios***. Tenemos en particular la siguiente propiedad:

- El seno de un ángulo es igual al coseno de su ángulo complementario.
- La tangente de un ángulo es igual a la cotangente de su ángulo complementario.
- La secante de un ángulo es igual a la cosecante de su ángulo complementario.

Ejemplo 1.5

En un triángulo rectángulo las medidas de sus catetos son 6 cm y 8 cm, respectivamente. Encuentre los valores de las funciones de sus ángulos agudos.

Solución

En la figura 1.11 representamos los datos. Para encontrar los valores solicitados debemos conocer, además de la longitud de sus catetos, la longitud de su hipotenusa. Por el teorema de Pitágoras

$$\begin{aligned} c^2 &= 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100, \\ c &= 10 \text{ cm}. \end{aligned}$$

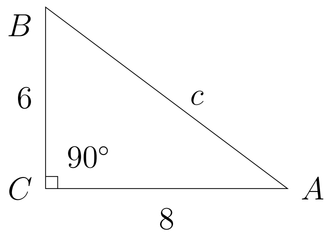


Figura 1.11

Por las definiciones:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} A &= \frac{6}{10} = \frac{3}{5},\\
\cos A &= \frac{8}{10} = \frac{4}{5},\\
\tan A &= \frac{6}{8} = \frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

Usamos la relación que existe entre las funciones y sus recíprocas y obtenemos :

$$\begin{aligned}
\csc A &= \frac{1}{\operatorname{sen} A} = \frac{5}{3},\\
\sec A &= \frac{1}{\cos A} = \frac{5}{4},\\
\cot A &= \frac{1}{\tan A} = \frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

Calculamos las relaciones correspondientes al ángulo B:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} B &= \frac{8}{10} = \frac{4}{5}, & \csc B &= \frac{10}{8} = \frac{5}{4},\\
\cos B &= \frac{6}{10} = \frac{3}{5}, & \sec B &= \frac{10}{6} = \frac{5}{3},\\
\tan B &= \frac{8}{6} = \frac{4}{3}, & \cot B &= \frac{6}{8} = \frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

Ejemplo 1.6

Si α es uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo y sen α=$\frac{1}{2}$, encuentre $\cos\alpha$ y $\tan\alpha$.

Solución

Teniendo en cuenta la definición de la función seno, podemos imaginar un triángulo en el cual la longitud de un cateto es igual a 1 y la longitud de la hipotenusa es 2 (la unidad de medida es igual para las dos dimensiones). Para hallar el valor del coseno debemos calcular el valor de b.

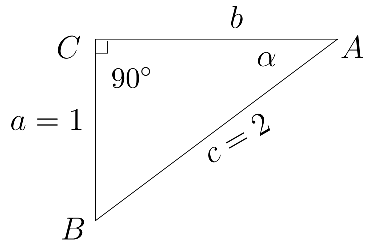


Figura 1.12

Por el teorema de Pitágoras:

$$2^2 = 1 + b^2.$$

Por lo cual

$$b^2 = 4 - 1 \quad y \quad b = \sqrt{3}.$$

Entonces

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad y \quad \tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Ejemplo 1.7

Una escalera de 6 m de longitud está apoyada en un muro de un edificio. Si el ángulo que forman la escalera y el muro es de 50°, ¿cuál es la distancia desde el pie de la escalera a la base del edificio?

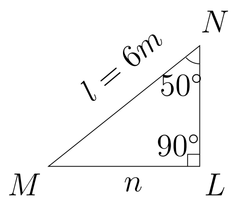


Figura 1.13

Solución

Para resolver esta clase de problemas es conveniente que hagamos gráficos que ilustren la información dada e identifiquemos los elementos que debemos encontrar. Esto nos puede dar una mejor visión para buscar el método más adecuado que nos lleve a la solución del problema. No debemos olvidar ponerle nombres a los vértices y a los ángulos.

En este caso se puede tomar un triángulo rectángulo en el cual la hipotenusa se identifica con la escalera y el ángulo $N = 50°$. Véase la figura 1.13. Para encontrar la distancia que hay desde el pie de la escalera al muro debemos calcular el valor de n, que es el cateto opuesto al ángulo N. Por la definición de seno de un ángulo tenemos que $\operatorname{sen} N = \dfrac{n}{l}$. Simplificando y teniendo en cuenta que $\operatorname{sen} 50° \approx 0.77$, obtenemos

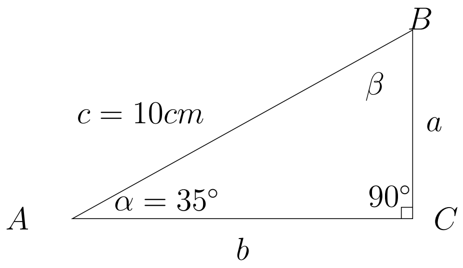
$$\operatorname{sen} 50° = \frac{n}{6},$$

$$n = 6(\operatorname{sen} 50°) \approx 6(0.77) \approx 4.62 \text{ metros}.$$

La distancia que hay del pie de la escalera al muro es aproximadamente igual a 4.62 metros.

Ejemplo 1.8

Resuelva el triángulo rectángulo de la figura



Resolver un triángulo es hallar la medda de cada uno de sus ángulos y de cada uno de sus lados. En este caso conocidos los valores del ángulo α y la hipotenusa c, debemos calcular las medidas del ángulo β y los catetos a y b.

Podemos encontrar la longitud de a, teniendo en cuenta que $\operatorname{sen} 35° = \dfrac{a}{10}$ y que $\operatorname{sen} 35° \approx 0.574$. Entonces

$$a = 10\ (\operatorname{sen} 35°) \approx 10\ (0.574) \approx 5.74 \text{ cm.}$$

Como los ángulos α y β son complementarios: $\alpha + \beta = 90°$. Por lo cual

$$\beta = 90° - \alpha = 90° - 35° = 55°.$$

El valor de b puede calcularse de diferentes maneras: usando el teorema de Pitágoras, o las relaciones seno o tangente del ángulo β. Eligiendo esta última, es decir $\tan 55° = \dfrac{b}{5.74}$ y teniendo presente que $\tan 55° \approx 1.428$, tenemos que:

$$b = 5.74\ (\tan 55°) \approx 5.74\ (1.428) \approx 8.20 \text{ cm.}$$

Lección 2

El conjunto de los números reales

En esta lección estudiaremos las principales propiedades del conjunto de los números reales necesarias para la mejor comprensión de su representación como puntos sobre la recta real. Asimismo, abordaremos el estudio de la representación decimal de un número real, lo cual nos facilitará algunos de los cálculos que realizaremos a lo largo del curso. Finalmente estudiaremos la representación de los puntos del plano en un sistema de coordenadas rectangulares

El conjunto de los números reales y la recta real

Uno de los temas más importantes acerca del conjunto de los números reales es el estudio de sus principales subconjuntos numéricos. Otro tópico de interés es el de la representación decimal de un número real.

Algunos conjuntos numéricos

Los siguientes conjuntos numéricos son subconjuntos importantes del conjunto de los números reales.

1. El conjunto que se utiliza para contar es el conjunto de los ***números naturales***. Lo denotaremos por $\mathbb{N}$ y está dado por

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}.$$

2. El conjunto de los ***números enteros***, denotado por $\mathbb{Z}$, es el conjunto

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\};$$

   $\mathbb{Z}$ contiene todos los números naturales, sus inversos aditivos y el cero.

3. El conjunto de los ***números racionales***, denotado por $\mathbb{Q}$, está formado por los cocientes de los números enteros. Este conjunto surge al agregar al conjunto de los enteros, las llamadas fracciones de dos números enteros. Recordemos que para los números reales no está definida la división por 0; por esto definimos el conjunto de los números racionales por

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}.$$

El número a se conoce como ***numerador*** y el número b como ***denominador***.

El conjunto de los números enteros está contenido en el conjunto de los racionales, puesto que si a es un entero, $a = \frac{a}{1}$ es un número racional.

4. Existen números reales que no pueden escribirse como el cociente de dos números enteros. Estos números se denominan ***números irracionales***; el conjunto de los números irracionales se denota por $\mathbb{I}$.

   Algunos ejemplos de números irracionales son los números $\sqrt{2} = 1.41421356\ldots$, $\sqrt{3} = 1.732050808\ldots$ y $\pi = 3.141592654\ldots$.

5. El conjunto de los ***números reales***, denotado por $\mathbb{R}$, es la unión de los conjuntos $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$, es decir:
$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}.$$

Relaciones de Orden

- Dados dos números reales a y b, decimos que a es ***mayor que*** b y escribimos $a > b$, si $a - b$ es un número positivo. En este caso, también podemos decir que b es ***menor que*** a y escribimos $b < a$.
- Decimos que a es ***mayor o igual*** que b, y escribimos $a \geq b$, si $a > b$ ó $a = b$; en este último caso también decimos que b es menor o igual que a y escribimos $b \leq a$.
- Si $a > x$ y $x > c$, escribimos $a > x > c$. Igualmente $a \geq x \geq c$ significa que $a \geq x$ y $x \geq c$.

Representación decimal de los números reales

Todos los números reales tiene una representación decimal; ésta tiene la forma: $r = b.a_1a_2a_3...a_n$ ó $r = b.a_1a_2a_3\ldots$.

El número b es un entero y los números que aparecen después del ***punto decimal*** denotados por a_i, llamados ***dígitos***, son números enteros, tales que $0 \leq a_i \leq 9$. El número b se denomina ***parte entera*** y la sucesión de dígitos $a_1a_2a_3\ldots$ se denomina ***parte decimal*** de r.

Para obtener la representación decimal de un número racional $\frac{a}{b}$, dividimos el numerador a por el denominador b. Cuando dividimos a por b tenemos dos posibilidades:

1. La parte decimal tiene un número finito de dígitos. Por ejemplo, $r_1 = \frac{3}{4} = 0.75$. En este caso la parte entera es $b = 0$ y la parte decimal 75, solamente tiene dos dígitos.
2. La parte decimal tiene un número ilimitado de dígitos. Por ejemplo, para el número racional $r_2 = \frac{4}{3}$, la representación decimal es $r_2 = 1.333333\ldots$. La parte entera es $b = 1$; con los puntos suspensivos indicamos que la parte decimal tiene un número ilimitado de dígitos. El dígito 3 se repite ilimitadamente.

Diremos que un número real tiene una representación decimal ***periódica*** si a partir de uno de sus dígitos, la parte decimal adopta la forma $ppppp\ldots$, donde p es una colección de dígitos. Diremos que la representación decimal periódica tiene un ***período*** p. Denotaremos la parte de la representación decimal que se repite con período p con una línea horizontal en la parte superior del período. Es decir $pppppp... \equiv \overline{p}$. Ilustramos estas ideas en los ejemplos 2.1, 2.2 y 2.3.

Ejemplo 2.1

El número racional $r_2 = \frac{4}{3} = 1.3333\ldots$ tiene una representación decimal periódica cuyo período es 3. Escribiremos $r_2 = 1.\overline{3}$.

Ejemplo 2.2

El número $r_3 = \frac{2}{7}$ tiene la representación decimal $r_3 = 0.285714285714285714\ldots$, su período es $p = 285714$. Escribimos también $r_3 = 0.\overline{285714}$.

Ejemplo 2.3

El número $r_4 = 12.13\overline{456}$ también se puede escribir como $r_4 = 12.13456456456\ldots$ y tiene período $p = 456$.

En cursos más avanzados de matemáticas se puede probar la siguiente propiedad

> ***Propiedad:***
> El número r es un número racional, si y sólo si su representación decimal tiene un número finito de dígitos o es periódica.

Ejemplo 2.4

La representación decimal del número irracional $\sqrt{2} = 1.414213562\ldots$, no es periódica y con los puntos suspensivos indicamos que tiene un número ilimitado de dígitos.

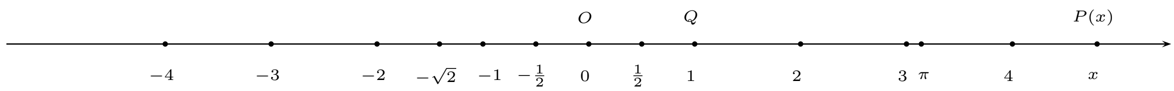
Nota 2.1

Los números irracionales son indispensables en el curso que iniciamos y los usaremos frecuentemente. Sin embargo, el cálculo de la representación decimal de un número irracional es un problema difícil y que se estudia en cursos más avanzados de matemáticas.

En la práctica aproximaremos los números irracionales, utilizando números racionales cuya parte decimal tenga un número finito de dígitos. Por ejemplo, en lugar de efectuar cálculos con $\pi = 3.14159\ldots$, trabajaremos con $\pi \approx 3.14$.

Recta real

Existe una correspondencia biunívoca entre el conjunto de los números reales y los puntos sobre una recta. Es decir, a cada número real corresponde un punto único sobre la recta y recíprocamente cada punto sobre la recta tiene asociado con él un número real único.



Recta real

Figura 2.1

Esta correspondencia se efectúa de la siguiente forma: tomamos por conveniencia una recta horizontal. Sobre esta recta marcamos un punto fijo O, que representa el origen. Seleccionamos una unidad de longitud u y un punto Q a la derecha de O a una distancia u de O. Asociamos el origen O con el número real 0 y el punto Q con el número real 1. Luego asociamos el punto situado a la derecha de Q y a una distancia de 2 unidades respecto a O con el número 2. Similarmente situamos el número 3, y los demás enteros positivos. Al punto situado en la mitad de la distancia entre O y Q se le asigna el número $\dfrac{1}{2}$. A los puntos situados a la izquierda de O se les asocian los inversos aditivos de los números reales correspondientes a los puntos simétricos con respecto al origen O. El número real x asociado con un punto P se llama ***coordenada*** de P o la ***abscisa*** de P y a la recta a cuyos puntos se han asignado coordenadas se le llama ***recta real***.

En la recta real destacamos las siguientes propiedades:

- Los números reales aparecen en la recta real divididos en tres subconjuntos: ***los números reales positivos*** son las coordenadas de los puntos a la derecha de O; el número real cero es la coordenada del origen O; ***los números reales negativos*** son las coordenadas de los puntos a la izquierda de O.
- Si los números reales a y b son tales que $a > b$, el punto con coordenada a está a la derecha del punto con coordenada b.

Por otro lado, si a y b son dos números reales, la **distancia** entre a y b, denotada por $d(a,b)$, es la medida del segmento que los une en la recta real.

- $d(a,b) \geq 0, \qquad d(a,b) = 0$ cuando $a = b$
- $d(a,b) = d(b,a)$.

El **valor absoluto** de un número a, denotado por $|a|$, es la distancia desde a hasta 0, es decir $|a| = d(a,0)$. Por lo tanto,

$$|a| = \begin{cases} a \text{ si } a \geqslant 0 \\ -a \text{ si } a < 0 \end{cases}$$

En general, si a y b son números reales $d(a,b) = |a-b|$.

Sistema de coordenadas rectangulares

Consideramos primero dos rectas que se interceptan perpendicularmente en el plano, una de ellas horizontal y la otra vertical. Llamamos ***eje*** x a la recta horizontal, ***eje*** y a la recta vertical y al punto de intersección ***origen*** O. Asignamos coordenadas a los puntos sobre estas rectas como se describió antes en la construcción de la recta real.

El sistema coordenado descrito se denomina ***sistema coordenado rectangular*** o ***plano cartesiano***. El origen O tiene el valor cero en ambos ejes. El plano formado por el eje x y el eje y se llama plano xy y los ejes x y y se denominan ***ejes coordenados.*** Los ejes coordenados dividen el plano xy en cuatro secciones llamadas ***cuadrantes*** como se muestra en la figura 2.2.

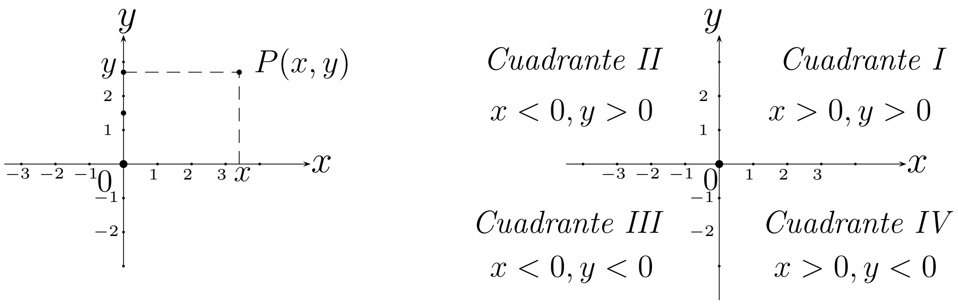


Figura 2.2

Cualquier punto P en el plano xy se puede representar usando un ***par ordenado*** (x, y) de números reales, llamado ***coordenadas de*** P. El número real x es la distancia desde el punto P al eje y, teniendo en cuenta su signo. Si el punto P está a la derecha del eje y, entonces $x > 0$ y el número real x será negativo si el punto P está a la izquierda del eje y. El número real y es la distancia desde el punto P al eje x,teniendo en cuenta su signo. Así, $y > 0$ si el punto P está arriba del eje x y será negativo si el punto P está debajo del eje x.

Si (x, y) son las coordenadas P, entonces x es la ***coordenada*** x o ***abscisa*** de P y y es la ***ordenada*** de P o ***coordenada*** y. El origen de coordenadas tiene coordenadas $(0, 0)$. Cualquier punto sobre el eje x tiene coordenadas de la forma $(x, 0)$ y cualquier punto sobre el eje y tiene coordenadas de la forma $(0, y)$.

Una manera didáctica de entender el significado de un plano cartesiano es considerarlo como una representación en calles y carreras de una cierta ciudad. Así el origen puede pensarse como el punto que representa el centro geográfico de la ciudad, el *eje* x puede verse como la carrera que pasa por allí y el *eje* y como la calle que cruza dicho punto. Por lo tanto, moverse en un plano cartesiano equivale a moverse por las calles y carreras de dicha ciudad.

Ejemplo 2.5

En la figura 2.3 se representan los puntos $P_1(3, \frac{3}{2})$, $P_2(-2, 2)$, $P_3(-\frac{3}{2}, -\frac{5}{2})$ y $P_4(3, -2)$. Observemos por ejemplo el punto P_3; puesto que su abscisa y ordenada son negativas, este punto está situado en el cuadrante III o tercer cuadrante.

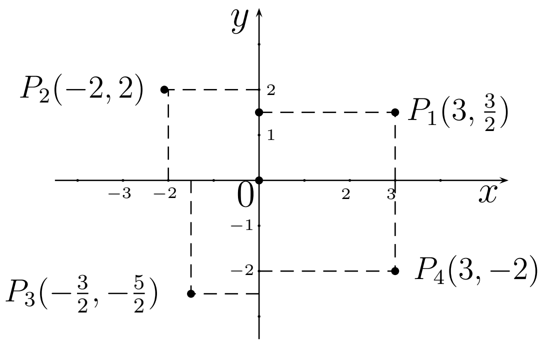


Figura 2.3

Ejemplo 2.6

Analicemos los signos de las abscisas y ordenadas en el Cuadrante IV (cuarto cuadrante). Observamos que todos los puntos localizados en este cuadrante están a la derecha del eje y y debajo del eje x. Por tanto las abscisas (o coordenadas x) son positivas y las ordenadas (o coordenadas y) son negativas.

Distancia entre dos puntos

Recordemos que la distancia entre dos puntos A y B del plano, es la longitud del segmento de recta que los une. La distancia entre dos puntos A de coordenadas (x_1, y_1) y B de coordenadas (x_2, y_2) en el plano puede ser determinada de la siguiente manera. Situemos los puntos $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ y $C(x_3, y_3)$ en el plano cartesiano de la figura 2.4.

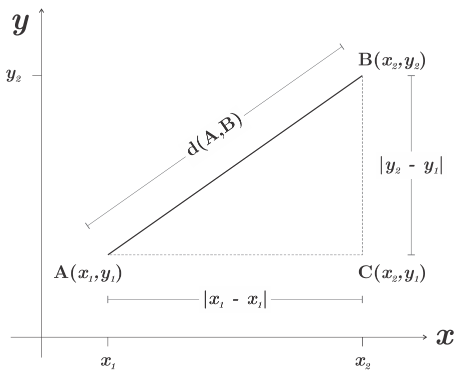


Figura 2.4

De acuerdo con lo que sabemos acerca de los números reales, como los puntos A y C están ubicados a la misma altura (digamos en la misma “carrera”), entonces su distancia debe ser aquella sobre la recta horizontal y corresponde a $|x_2 - x_1|$ (valor absoluto de $|x_2 - x_1|$); igualmente, los puntos C y B están sobre la misma recta vertical (digamos la misma “calle”) y por lo tanto su distancia es $|y_2 - y_1|$.

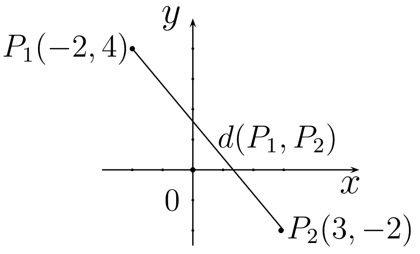
Puesto que el triángulo ABC es un triángulo rectángulo, mediante el teorema de Pitágoras se obtiene que

La distancia entre dos puntos $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$ viene dada por

$$d(A,B) = \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Ejemplo 2.7

Localice los puntos $P_1(-2,4)$ y $P_2(3,-2)$ en el plano cartesiano y encuentre la distancia entre estos puntos.



$$d(P_1,P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$d(P_1,P_2) = \sqrt{(3-(-2))^2 + (-2-4)^2}$$
$$d(P_1,P_2) = \sqrt{(5)^2 + (-6)^2} = \sqrt{25+36}$$
$$d(P_1,P_2) = \sqrt{61}.$$

Figura 2.5

Punto medio entre dos puntos

Teniendo en cuenta la fórmula de la distancia entre dos puntos vista anteriormente, es posible determinar las coordenadas (x, y) del punto medio M del segmento de recta que une dos puntos A de coordenadas (x_1, y_1) y B de coordenadas (x_2, y_2) en el plano. Para esto, observando la figura 2.6, basta notar que si M es el punto medio entre A y B entonces la coordenada horizontal de M (es decir x) se encuentra en el punto medio entre las coordenadas horizontales de A y B respectivamente (es decir x_1 y x_2). De manera semejante se concluye que la coordenada vertical de M se encuentra en el punto medio de las coordenadas verticales de A y B.

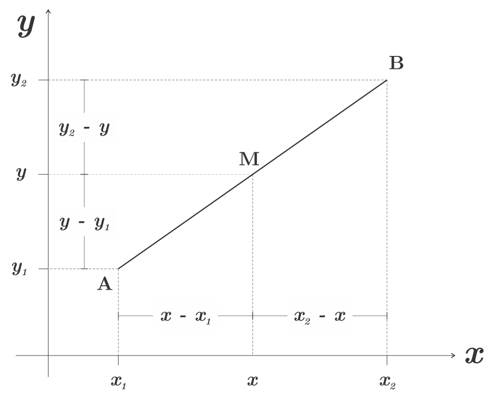


Figura 2.6

Entonces

$$x - x_1 = x_2 - x \qquad \text{y} \qquad y - y_1 = y_s - y,$$

de donde

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2},$$

y por lo tanto:

Las coordenadas del punto medio M se pueden obtener como

$$M = (x, y) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

Lección 3

Funciones trigonométricas de ángulos en posición canónica I

En esta lección estudiaremos la representación de los puntos de un plano en un sistema de coordenadas rectangular. Posteriormente definiremos los ángulos orientados y los ángulos en posición normal, (estándar o canónica). También extenderemos las definiciones de las relaciones trigonométricas de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo a las funciones trigonométricas en el conjunto de los ángulos en posición canónica.

Ángulos orientados

En la antigüedad se usaron propiedades de los triángulos para realizar estudios relacionados con la posición de los astros, la medición de la tierra y la arquitectura, entre otras aplicaciones. Posteriormente a partir de trabajos realizados por diferentes matemáticos, se observó que las definiciones de las relaciones dadas entre los ángulos y los lados en un triángulo rectángulo podían extenderse para lograr definiciones de las funciones trigonométricas en el campo de los números reales. Esto llevó a la definición de ángulo en una forma más general que permite representar ángulos cuya medida es mayor de 360 grados, con una determinada orientación y diferenciar los rayos que los forman.

Un ***ángulo orientado*** se genera a partir de dos rayos coincidentes con origen común, uno de los cuales permanece fijo y el otro rota en torno al origen hasta una posición final. El origen de los rayos es el ***vértice***, el rayo que permanece fijo recibe el nombre de ***lado inicial*** del ángulo y el lado que rota, una vez que adopta su posición final se denomina ***lado final*** o ***lado terminal***. El rayo que rota tiene libertad en el sentido de la rotación y no tiene limitación en el número de rotaciones completas alrededor del vértice.

Para la notación de un ángulo debe tenerse en cuenta además de su medida, la dirección en la que el lado final hizo su rotación. Si el rayo que gira lo hace en sentido contrario a las manecillas del reloj, el ángulo está orientado positivamente y se denomina ángulo positivo; si lo hace en el mismo sentido, está orientado negativamente y recibe el nombre de ángulo negativo. Si el lado final ha girado hasta n veces, puede continuar su rotación pero no alcanza a hacer un nuevo giro completo es un ángulo de n vueltas (o n giros).

Ejemplo 3.1

En la figura 3.1 se representan los ángulos $\alpha = 60°$ y $\beta = 290°$, cuyo lado inicial es dado.

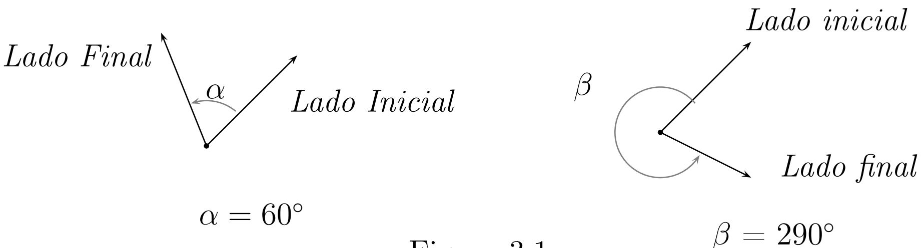


Figura 3.1

Ejemplo 3.2

Representamos los ángulos $\delta = -225°$ y $\gamma = -390°$ a partir de un lado inicial dado en la figura 3.2

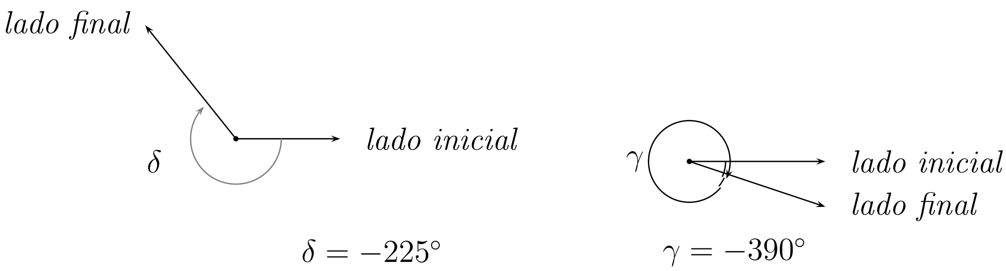


Figura 3.2

Ejemplo 3.3

1. Si $\alpha = 45°, \alpha$ es un ángulo que mide $45°$ y está orientado positivamente.
2. Si $\beta = (-225)°$, β es un ángulo que mide $225°$, orientado negativamente.
3. Si $\phi = 770°$, ϕ es un ángulo que mide $770°$, de dos vueltas, orientado positivamente. Observamos que $770° = 2(360°) + 50°$.
4. Si $\theta = (-540)°$, θ es un ángulo que mide $540°$, de una vuelta, orientado negativamente. Observamos que $-540° = 1(-360)° - 180°$.

Hasta este momento los ejemplos han sido dados con ángulos medidos en grados sexagesimales. Conocemos otra medida que es el radián, cuando utilizamos este sistema con frecuencia se omite la palabra radián.

Ejemplo 3.4

1. $\alpha = \frac{\pi}{5}$, α es un ángulo que mide $\frac{\pi}{5}$ radianes y está orientado positivamente.
2. Cuando escribimos $\beta = -6$, nos estamos refiriendo a un ángulo que mide 6 radianes y está orientado negativamente.
3. Si $\phi = 6.5$ entonces ϕ es un ángulo de una vuelta que mide 6.5 radianes. Sabemos que ha hecho un giro completo porque en radianes un ángulo de un giro completo mide 2π radianes y este valor es inferior a 6.5 radianes; no alcanza a dar una vuelta más ya que 6.5 es menor que 4π.
4. Si $\theta = \frac{-3\pi}{2}$, θ es un ángulo que mide $\frac{3\pi}{2}$ y está orientado negativamente.

Ángulos en posición estándar o canónica.

Para llegar a la generalización de las definiciones de las relaciones trigonométricas colocamos los ángulos en ***posición estándar*** o ***posición canónica*** , es decir, colocamos los ángulos en un sistema de coordenadas cartesianas de tal forma que el vértice sea el origen del sistema de coordenadas y el lado inicial sea el eje positivo de las abscisas. El lado final puede ocupar cualquier posición en el plano partiendo del vértice. Si el lado final está en uno de los ejes coordenados, el ángulo recibe el nombre de ***ángulo cuadrantal*** de lo contrario su nombre depende del cuadrante en el que se encuentre: primer, segundo, tercer o cuarto cuadrante. Es importante tener en cuenta que en la definición generalizada de ángulo se presentan casos en los cuales el lado final de dos de ellos diferentes ocupan la misma posición. Esto es, ángulos con diferentes medidas u orientaciones pueden tener el mismo lado inicial, el eje positivo de las abscisas, y el mismo lado final. Dichos ángulos reciben el nombre de ***ángulos coterminales***.

Ejemplo 3.5

1. Los ángulos representados en cada uno de los sistemas de coordenadas en la figura 3.3 son coterminales. Sus cuadrantes correspondientes son: para α y β tercer cuadrante; para ϕ y γ primer cuadrante.

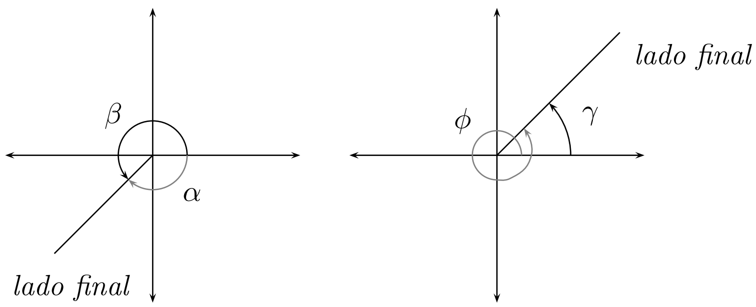


Figura 3.3

2. En la figura 3.4 representamos ángulos cuadrantales, cuyo lado final está sobre el eje vertical.

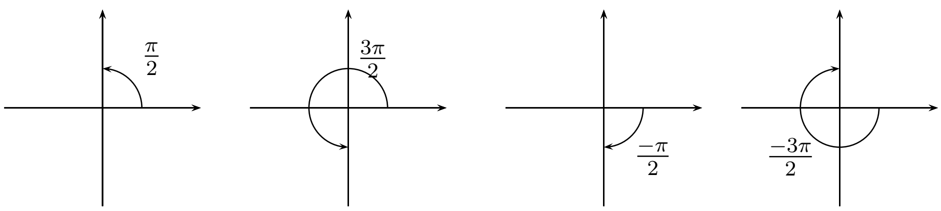


Figura 3.4

3. En la figura 3.5 se representan ángulos cuadrantales con su lado final sobre el eje horizontal.

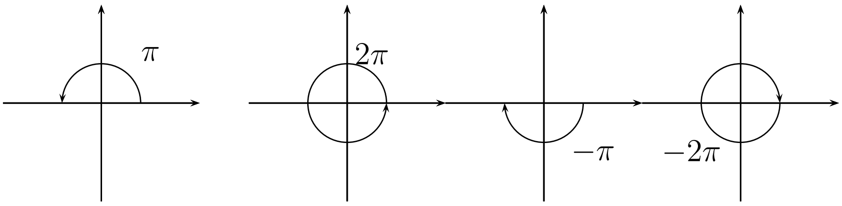
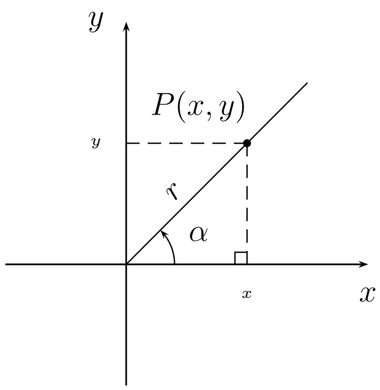


Figura 3.5

Funciones trigonométricas de ángulos en posición canónica.

Sea α un ángulo en posición canónica (o estándar), sea $P(x,y) \neq (0,0)$ un punto en el lado final de α. Denotemos por r a la distancia desde el punto $P(x,y)$ al origen $(0,0)$, $r = \sqrt{x^2+y^2}$. Definimos las funciones trigonométricas de α en términos de las coordenadas (x,y) del punto P, así:



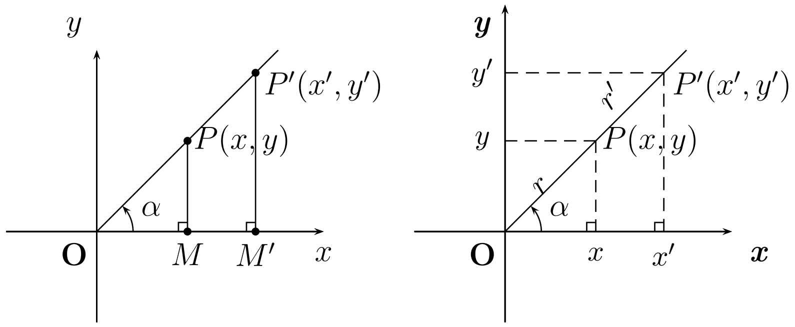
$$
\begin{aligned}
\operatorname{sen}\alpha &= \frac{y}{r},\\
\cos\alpha &= \frac{x}{r},\\
\tan\alpha &= \frac{y}{x}, \text{ si } x \neq 0,\\
\cot\alpha &= \frac{x}{y}, \text{ si } y \neq 0,\\
\sec\alpha &= \frac{r}{x}, \text{ si } x \neq 0,\\
\csc\alpha &= \frac{r}{y}, \text{ si } y \neq 0.
\end{aligned}
$$

Figura 3.6

Observación 1. Las definiciones de las funciones trigonométricas dependen únicamente del lado final y no dependen de las coordenadas del punto P que se haya seleccionado sobre este lado. Es decir, veremos que si $P'(x',y')$ es un punto situado sobre el mismo lado final que el punto $P(x,y)$, los valores de las funciones trigonométricas definidos en términos del punto P' tienen el mismo valor que los definidos en términos del punto P. Para ver esto, basta observar en la figura 3.7, que los triángulos rectángulo OMP y $OM'P'$ son semejantes y para estos triángulos se tienen relaciones de proporcionalidad entre sus lados homólogos. Si r y r' son las distancias desde los puntos P y P' al origen, respectivamente, por la semejanza de los triángulos se tienen las siguientes relaciones de proporcionalidad

$$
\begin{cases}
\dfrac{y}{r} = \dfrac{y'}{r'}\\[2mm]
\dfrac{x}{r} = \dfrac{x'}{r'}\\[2mm]
\dfrac{y}{x} = \dfrac{y'}{x'}.
\end{cases}
\tag{3.1}
$$

Estas igualdades implican que si definimos las funciones trigonométricas a partir del punto P obtenemos los mismos resultados que si las definimos a partir del punto P'. Por ejemplo, a partir del punto P obtenemos $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{y}{r}$ y a partir del punto P' tenemos que $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{y'}{r'}$. Pero $\dfrac{y}{r}$ y $\dfrac{y'}{r'}$ son iguales por la ecuación (3.1). Lo mismo sucede para las demás funciones trigonométricas.



$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$(r')^2 = (x')^2 + (y')^2$$

Figura 3.7

Observación 2. La definición dada realmente ***extiende*** las definiciones de las relaciones trigonométricas definidas en la lección 2 para los ángulos agudos de un triángulo rectángulo. Observe que si tenemos un triángulo rectángulo, y α es uno de sus ángulos agudos, si α está en posición canónica como en la figura 3.7, el cateto opuesto al ángulo α es el segmento $\overline{PM}$ con longitud y, el cateto adyacente es $\overline{OM}$ con longitud x y su hipotenusa es $\overline{OP}$ con longitud r. Por el teorema de Pitágoras, $r^2 = x^2 + y^2$. Consecuentemente las funciones trigonométricas coinciden con las definiciones para las relaciones trigonométricas dadas antes. Así,

$$
\begin{aligned}
\operatorname{sen}\alpha &= \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{y}{r}, & \cos\alpha &= \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{x}{r},\\
\tan\alpha &= \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{y}{x}, & \cot\alpha &= \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{x}{y},\\
\sec\alpha &= \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{r}{x}, & \csc\alpha &= \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{r}{y}.
\end{aligned}
$$

Observación 3. Debido a que las funciones trigonométricas están definidas en términos del lado final del ángulo, los valores de las funciones trigonométricas para ángulos coterminales son iguales. El ángulo α medido en radianes es coterminal con los ángulos de la forma $\alpha + 2n\pi$, donde n es un entero, que indica el número de giros y el sentido en que ellos se hacen. En particular, tenemos las siguientes igualdades:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{sen}(\alpha + 2\pi) &= \operatorname{sen}\alpha, & \cos(\alpha + 2\pi) &= \cos\alpha,\\
\tan(\alpha + 2\pi) &= \tan\alpha, & \cot(\alpha + 2\pi) &= \cot\alpha,\\
\sec(\alpha + 2\pi) &= \sec\alpha, & \csc(\alpha + 2\pi) &= \csc\alpha.
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

Decimos que las funciones trigonométricas son ***periódicas*** con período menor o igual que 2π.

Observación 4. Debido a que la división por cero no está definida, es necesario tener en cuenta que hay restricciones para los ángulos cuadrantales. Por ejemplo si el lado final del ángulo está sobre el eje y, su abscisa es cero y por lo tanto no se pueden definir la tangente, ni la secante de dichos ángulos. No están definidas la tangente, ni la secante de $\frac{\pi}{2}$, ni de $\frac{3\pi}{2}$. Si el lado final está sobre el eje x no pueden definirse ni la función cotangente ni la función cosecante. Las funciones seno y coseno están definidas para todos los ángulos.

Signo de las funciones trigonométricas

El signo de las funciones trigonométricas depende de los respectivos signos de las abscisas y ordenadas, ya que las distancias son siempre números positivos.

En el primer cuadrante, las ordenadas y las abscisas son todas positivas. Así, todas las funciones toman valores positivos.

En el segundo cuadrante las ordenadas son positivas y las abscisas negativas. Como los valores de seno y cosecante dependen de la ordenada, sus valores son positivos. El coseno y la secante dependen de la abscisa, por lo tanto son negativos. La tangente y la cotangente dependen de los valores de las dos coordenadas, abscisa y ordenada y se obtienen por el cociente de dos números con signo opuesto, entonces son negativas.

En el tercer cuadrante, tanto las abscisas como las ordenadas son negativas, seno, coseno, secante y cosecante toman entonces valores negativos. La tangente y la cotangente son positivas porque resultan del cociente de dos números con el mismo signo.

En el cuarto cuadrante las ordenadas son negativas y las abscisas son positivas, esto hace que el seno y la cosecante tomen valores negativos; el coseno y la secante toman valores positivos; los valores de tangente y la cotangente por ser el cociente de números con diferente signo son negativos. En resumen tenemos la siguiente tabla:

Cuadrante	**Funciones positivas**	**Funciones negativas**
I	todas	ninguna
II	sen, csc	cos, tan, sec, cot
III	tan, cot	sen, cos, csc, sec
IV	cos, sec	sen, tan, csc, cot

Ejemplo 3.6

Si el punto P de coordenadas $(-3, 4)$ pertenece al lado final del ángulo θ, en posición canónica. Encuentre, si es posible, el valor de todas sus funciones trigonométricas.

Solución
Calculamos la distancia r del origen al punto P. Por las definiciones: $r = \sqrt{9 + 16} =$

$\sqrt{25} = 5$ y

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}\theta &= \frac{4}{5}, \quad \csc\theta = \frac{5}{4},\\
\cos\theta &= \frac{-3}{5} = -\frac{3}{5}, \qquad \sec\theta = \frac{5}{-3} = -\frac{5}{3},\\
\tan\theta &= \frac{4}{-3} = -\frac{4}{3}, \qquad \cot\theta = \frac{-3}{4} = -\frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

Ejemplo 3.7

Encuentre los valores de las funciones trigonométricas del ángulo de segundo cuadrante, cuyo lado final está sobre la recta cuya ecuación es $y = -\frac{5}{2}x$.

Solución

Denotemos por α al ángulo cuyo lado final está sobre la recta dada. Para calcular los valores solicitados debemos conocer las coordenadas de un punto que esté en el lado final del ángulo. Como α es un ángulo de segundo cuadrante tomamos la abscisa negativa y usando la ecuación de la línea recta, hallamos la ordenada. En la figura 3.8 hemos tomado $x = -2$. Reemplazamos en la ecuación de la recta y obtenemos $y = -\frac{5}{2}(-2) = 5$. El punto que vamos a tomar como referencia es el punto P con coordenadas: $(-2, 5)$. La distancia de P al origen es $r = \sqrt{(-2)^2 + 5^2} = \sqrt{29}$.

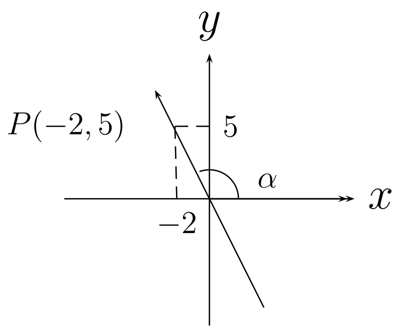


Figura 3.8

Así:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}\alpha &= \frac{5}{\sqrt{29}} = \frac{5\sqrt{29}}{29}, \quad \csc\alpha = \frac{\sqrt{29}}{5},\\
\cos\alpha &= \frac{-2}{\sqrt{29}} = -\frac{2\sqrt{29}}{29}, \quad \sec\alpha = \frac{\sqrt{29}}{-2} = -\frac{\sqrt{29}}{2},\\
\tan\alpha &= \frac{5}{-2} = -\frac{5}{2}, \quad \cot\alpha = \frac{-2}{5} = -\frac{2}{5}.
\end{aligned}$$

Lección 4

Funciones trigonométricas de ángulos en posición canónica II

En esta lección continuamos nuestro estudio sobre las funciones trigonométricas de ángulos en posición canónica. Iniciaremos con el estudio de las funciones trigonométricas de los ángulos cuadrantales que son aquellos que tienen su lado terminal sobre los ejes coordenados y las funciones trigonométricas de los ángulos de $30°, 45°$ y $60°$. Aprenderemos a calcular los ángulos de referencia que son ángulos entre 0 y $\frac{\pi}{2}$ muy importante porque permiten simplificar los cálculos de las funciones trigonométricas de ángulos arbitrarios en términos de las funciones trigonométricas de ángulos en el primer cuadrante.

Funciones trigonométricas de ángulos cuadrantales

Los ángulos cuadrantales o de cuadrante son aquellos ángulos en posición canónica que tienen su lado final en uno de los ejes coordenados de un sistema de coordenadas rectangulares. En las definiciones de las funciones trigonométricas hay restricciones para algunos de estos ángulos. Debido a la periodicidad de las funciones trigonométricas es suficiente considerar los ángulos 0, $\frac{\pi}{2}$, π y $\frac{3\pi}{2}$.

El procedimiento que vamos a seguir, para el ángulo $\alpha = 0$, es el mismo para todos los ángulos cuadrantales. En un sistema de coordenadas cartesianas, ubicamos el ángulo en posición canónica; consideramos un punto cualquiera P sobre el lado terminal del ángulo y calculamos el valor de la distancia r desde el punto P al origen de coordenadas cartesianas y a partir de esta información calculamos las funciones trigonométricas. Es importante tener presente que todos los resultados son válidos para el ángulo dado y cualquier otro ángulo coterminal con él, que se obtenga a través de giros completos, sean éstos positivos o negativos. Ilustraremos este procedimiento para $\alpha = 0$, las funciones trigonométricas de los demás ángulos se calculan similarmente y las resumimos en la tabla 4.1.

Funciones trigonométricas del ángulo $\alpha = 0$

Tomamos el punto $P(1, 0)$ sobre su lado terminal, el cual coincide con el eje x. La distancia r desde P al origen O es $r = 1$. Entonces las funciones trigonométricas son

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 0 &= \frac{0}{1} = 0, & \cos 0 &= \frac{1}{1} = 1, \\ \tan 0 &= \frac{0}{1} = 0, & \sec 0 &= \frac{1}{1} = 1. \end{aligned}$$

$\cot 0$ y $\csc 0$ no están definidas pues P tiene ordenada igual a 0.

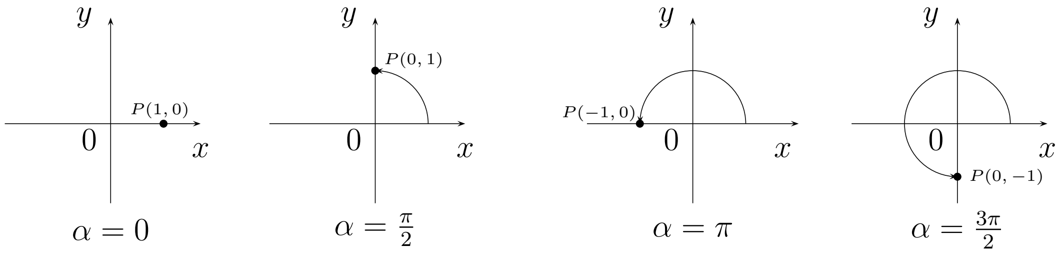


Figura 4.1

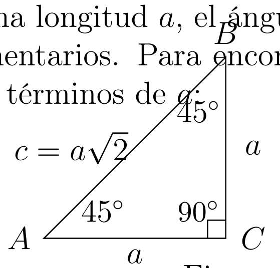
Funciones trigonométricas de ángulos cuadrantales

Ángulo	P(x,y)	r	sen	cos	tan	cot	sec	csc
0	(1,0)	1	0	1	0	no definida	1	no definida
$\frac{\pi}{2}$	(0,1)	1	1	0	no definida	0	no definida	1
π	(-1,0)	1	0	-1	0	no definida	-1	no definida
$\frac{3\pi}{2}$	(0,-1)	1	-1	0	no definida	0	no definida	-1

Tabla 4.1

Funciones trigonométricas del ángulo 45° o $\frac{\pi}{4}$.

Consideremos el triángulo rectángulo isósceles ΔACB representado en la figura 4.2. Sus dos catetos tienen la misma longitud a, el ángulo en C es recto y sus dos ángulos agudos miden 45° y son complementarios. Para encontrar las razones trigonométricas, vamos a expresar la hipotenusa en términos de a:



$$c^2 = a^2 + a^2 = 2a^2,$$
$$c = \sqrt{2a^2},$$
$$c = a\sqrt{2}.$$

Figura 4.2

Por las definiciones:

$$\operatorname{sen} 45^\circ = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos 45^\circ = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\tan 45^\circ = \frac{a}{a} = 1.$$

Utilizamos las relaciones de los ángulos complementarios y las relaciones recíprocas para calcular las funciones trigonométricas restantes

$$\cot 45^\circ = \tan 45 = 1, \quad \sec 45^\circ = \frac{1}{\cos 45^\circ} = \sqrt{2} \quad \text{y} \quad \csc 45^\circ = \sec 45^\circ = \sqrt{2}.$$

Funciones del ángulo $\frac{\pi}{6}$ ó 30°

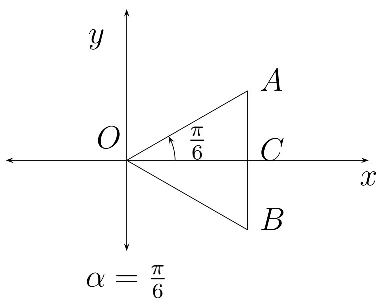


Figura 4.3

Para hallar las funciones trigonométricas del ángulo α, tomamos un punto $A(x, y)$ en su lado final. Construimos el triángulo ΔACO. Se infiere que el ángulo $\angle OAC = \frac{\pi}{3}$, pues la suma de los ángulos interiores del triángulo ΔAOC mide π (ó 180°). Construimos el triángulo ΔBCO congruente con el triángulo ΔACO. Entonces el triángulo ΔAOB es un triángulo equilátero pues sus tres ángulos miden $\dfrac{\pi}{3}$ (ó 60°).

Supongamos que la distancia r de A hasta O es igual a 2. Debemos hallar las coordenadas (x,y) del punto A. Puesto que el triángulo es equilátero la medida de cada uno de sus lados es 2. También sabemos que en un triángulo equilátero la altura bisecta a la base y consecuentemente el segmento $\overline{AC}$ mide 1. Entonces la ordenada y es igual a 1. Por el teorema de Pitágoras x satisface la ecuación

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 4, \\ x^2 &= 4 - y^2 = 4 - 1 = 3, \\ x &= \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Entonces, puesto que $r = 2$ y las coordenadas (x, y) de A son $(\sqrt{3}, 1)$, tenemos

$$\begin{aligned} &\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{y}{r} = \frac{1}{2}, && \cos\frac{\pi}{6} = \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ &\tan\frac{\pi}{6} = \frac{y}{x} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}, && \cot\frac{\pi}{6} = \frac{x}{y} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}, \\ &\sec\frac{\pi}{6} = \frac{r}{x} = \frac{2}{\sqrt{3}} = 2\frac{\sqrt{3}}{3}, && \csc\frac{\pi}{6} = \frac{r}{y} = \frac{2}{1} = 2. \end{aligned}$$

Funciones trigonométricas de $\dfrac{\pi}{3}$

Observamos que los ángulos $\dfrac{\pi}{3}$ y $\dfrac{\pi}{6}$ son complementarios, teniendo en cuenta las relaciones que hay entre las funciones de un ángulo y su complemento, podemos concluir que:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} &= \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, & \cos\frac{\pi}{3} &= \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2},\\
\tan\frac{\pi}{3} &= \cot\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}, & \cot\frac{\pi}{3} &= \tan\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3},\\
\sec\frac{\pi}{3} &= \csc\frac{\pi}{6} = 2, & \csc\frac{\pi}{3} &= \sec\frac{\pi}{6} = 2\frac{\sqrt{3}}{3}.
\end{aligned}$$

Funciones trigonométricas de ángulos de más de un giro

Recordemos que las funciones trigonométricas de dos ángulos coterminales tienen los mismos valores y que todo ángulo α es coterminal con los ángulos que se obtienen por giros en cualquier sentido cuando sus lados terminales coinciden. Para hallar las funciones de este tipo de ángulos, se busca su ángulo coterminal positivo α tal que $0 \leq \alpha \leq 360°$, (ó $0 \leq \alpha \leq 2\pi$).

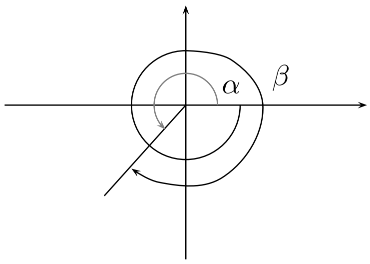


Figura 4.4

Ejemplo 4.1

1. Encuentre los valores de seno, coseno y tangente de $\beta = 780°$.

   Solución
   Cuando el ángulo es positivo, buscamos el número de vueltas que ha dado el lado final, esto es, cuántas veces el lado final pasó por el eje x positivo. Es decir, ¿cuántas veces recorrió 360°? Dividimos el ángulo dado por 360; el cociente da el número de vueltas y el residuo es la medida del ángulo coterminal que estamos buscando. Así,

   $$780° = 2(360°) + 60°$$

   Respuesta: El ángulo coterminal buscado es $\alpha = 60°$. Las funciones trigonométricas de 780° son iguales a las funciones trigonoméricas de 60°.

2. Encuentre los valores de las funciones trigonométricas de $\theta = -630°$.

   Solución
   Debemos tener en cuenta que las funciones van a expresarse en términos de un

ángulo positivo cuya medida sea menor que 360°. Contamos el número de giros que dio el lado final en sentido negativo y agregamos el valor que falta para completar el giro. Hemos sumado dos cantidades negativas. Para obtener el ángulo que satisfaga las condiciones, se debe sumar la cantidad que se ha restado. El ángulo se expresa por: $\theta = 360n + \alpha$, donde n es un entero negativo, y α es positivo y su medida es menor que 360°. Así,

$$-630° = 360°(-2) + 90°.$$

Respuesta: El ángulo coterminal buscado es $\alpha = 90°$. Las funciones trigonométricas de $-630°$ son iguales a las funciones trigonoméricas de 90°.

Funciones de $(-\theta)$

A partir de la figura 4.5 podemos estudiar la relación que existe entre las funciones trigonométricas de un ángulo dado θ y las de su ángulo ***opuesto*** $(-\theta)$.

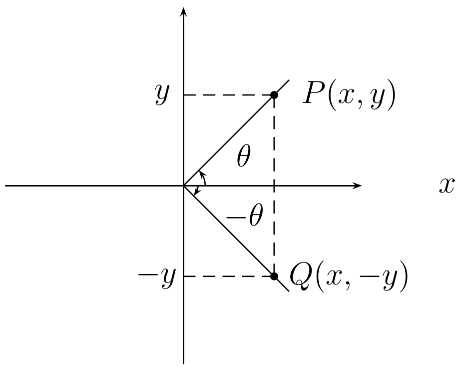


Figura 4.5

Si el punto P de coordenadas (x, y) está en el lado final del ángulo θ, el punto $Q(x, -y)$ está en el lado final de $-\theta$. Ya conocemos que el valor de las funciones trigonométricas no varía cuando se escogen puntos diferentes en el mismo lado final del ángulo θ. Seleccionemos P de tal forma que esté a una distancia $r = 1$ desde el origen. La distancia de Q al origen también será $r = 1$. Entonces las funciones de θ son:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r} = y, \qquad \cos\theta = \frac{x}{r} = x, \qquad \tan\theta = \frac{y}{x},$$
$$\cot\theta = \frac{x}{y}, \qquad \sec\theta = \frac{r}{x} = \frac{1}{x}, \qquad \csc\theta = \frac{r}{y} = \frac{1}{y}.$$

Las funciones de $-\theta$ son:

$$\operatorname{sen}(-\theta) = \frac{-y}{r} = -\frac{y}{r} = -y, \qquad \cos(-\theta) = \frac{x}{r} = x, \qquad \tan(-\theta) = \frac{-y}{x} = -\frac{y}{x},$$
$$\cot(-\theta) = \frac{x}{-y} = -\frac{x}{y}, \qquad \sec(-\theta) = \frac{r}{x} = \frac{1}{x}, \qquad \csc(-\theta) = \frac{r}{-y} = -\frac{r}{y} = -\frac{1}{x}.$$

Concluimos entonces que

$$
\begin{cases}
\operatorname{sen}(-\theta) &= -\operatorname{sen}\theta, \qquad \cos(-\theta) = \cos\theta,\\
\tan(-\theta) &= -\tan\theta, \qquad \cot(-\theta) = -\cot\theta,\\
\sec(-\theta) &= \sec\theta, \qquad \csc(-\theta) = -\cot\theta.
\end{cases} \tag{4.1}
$$

Ejemplo 4.2

1. $\operatorname{sen}(-\frac{\pi}{3}) = -\operatorname{sen}(\frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.
2. $\cos(-\pi) = \cos(\pi) = -1$.
3. Si $\cos(-\alpha) = -0.78$, entonces $\cos\alpha = -0.78$.
4. $\tan(-\frac{\pi}{4}) = -\tan\frac{\pi}{4} = -1$.

Ángulos de referencia

Desde los inicios del estudio de la geometría y de la trigonometría se han calculado las funciones trigonométricas a través de tablas, las cuales brindan la información en términos de ángulos agudos. Para hallar los valores de las funciones de cualquier ángulo, se hace la ***reducción al primer cuadrante***. El ***ángulo de referencia*** θ_R de un ángulo θ no cuadrantal en posición estándar es el ángulo agudo formado por el lado terminal de θ y el eje x. Las funciones trigonométricas de θ se determinan en términos de las funciones del ángulo de referencia teniendo en cuenta el cuadrante de θ.

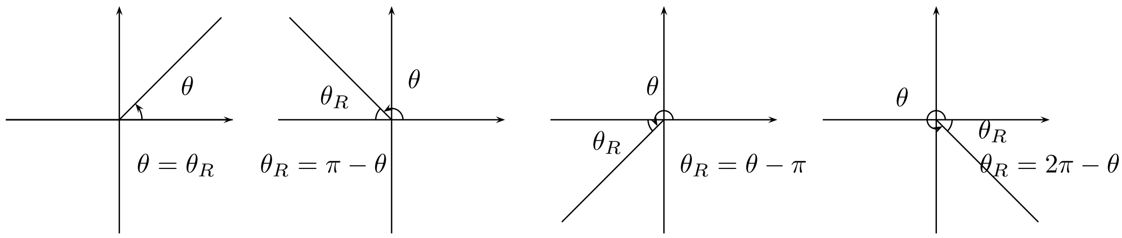


Figura 4.6

Ejemplo 4.3

1. Encuentre el ángulo de referencia para los ángulos: $\alpha = 150°, \beta = \dfrac{5\pi}{4}, \theta = \dfrac{11\pi}{6}$.

   Solución

   Véase la figura 4.6. El ángulo α es de segundo cuadrante. Su ángulo de referencia es:
   $$\alpha_R = 180° - 150° = 30°.$$
   El ángulo β es de tercer cuadrante. Su ángulo de referencia es:
   $$\beta_R = \frac{5\pi}{4} - \pi = \frac{\pi}{4}.$$
   θ es un ángulo de cuarto cuadrante. Su ángulo de referencia es:
   $$\theta_R = 2\pi - \frac{11\pi}{6} = \frac{\pi}{6}.$$

2. Usando ángulos de referencia halle el seno, el coseno y la tangente del ángulo $\alpha = 200°$.

   Solución

   Primero buscamos el ángulo de referencia:

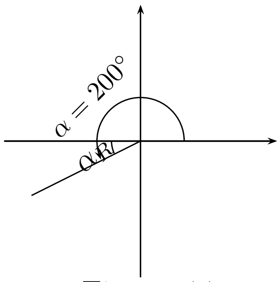
   

   Figura 4.7

   El ángulo está en el tercer cuadrante, por lo tanto:

   $$\alpha_R = 200° - 180° = 20°.$$

   Hallamos las funciones del ángulo que mide $20°$ y tenemos en cuenta que por estar α en el tercer cuadrante, el seno y el coseno son negativos y la tangente es positiva. Teniendo en cuenta que $\operatorname{sen} 20° \approx 0.34, \cos 20° \approx 0.93$ y $\tan 20° \approx 0.36$ tenemos que:

   $$\operatorname{sen} \alpha = -0.34, \qquad \cos \alpha = -0.94, \qquad \tan \alpha = 0.36.$$

Lección 5

Funciones trigonométricas de números reales I

En esta lección estudiaremos cómo se puede extender la definición de las funciones trigonométricas, hechas inicialmente para ángulos en posición canónica a funciones cuyo dominio es un subconjunto de los números reales. Consideraremos sus principales propiedades, haremos su representación geométrica en el plano cartesiano y obtendremos información a partir del análisis de ellas.

Funciones trigonométricas en el conjunto de los números reales

Si t es un número real, el valor de una función trigonométrica en t, es el valor de esa función trigonométrica en un ángulo de t radianes, cuando ella está definida en dicho ángulo. Así:

- Si t es un número real mayor o igual a cero el valor de la función en t es el que le corresponde al ángulo que mide t radianes.
- Si t es un real negativo el valor de la función en t es el valor que le corresponde al ángulo que mide $-t$ radianes y está orientado negativamente.

Ejemplo 5.1

1. $\operatorname{sen} 15$ corresponde al seno del ángulo que mide 15 radianes orientado positivamente.
2. $\cos(-20)$ es el coseno del ángulo que mide 20 radianes orientado negativamente.
3. $\operatorname{sen} 25 \neq \operatorname{sen} 25°$.

Recordemos que hay ángulos para los cuales no están definidas las funciones tangente, secante, cosecante y cotangente. Esto nos lleva naturalmente a considerar sólo el conjunto de los valores para los cuales podemos definir la función. Dada una función el conjunto de números reales para los cuales está definida la función es su ***dominio***.

La ***círcunferencia trigonométrica*** es una circunferencia cuyo radio es la unidad y cuyo centro es el origen de un sistema de coordenadas cartesianas.

Utilizaremos la circunferencia trigonométrica como un instrumento para simplificar los cálculos y organizar el estudio de las funciones trigonométricas y sus gráficas. Tomaremos un punto P en la intersección del lado final del ángulo t y la circunferencia trigonométrica. A medida que t va tomando valores en el conjunto de los números reales, el punto P va recorriendo el círculo trigonométrico, girando a medida que el valor de t cambia. Los giros son en el sentido positivo si el número real t se incrementa y si el valor de t disminuye, el giro de P sobre el círculo unitario es negativo. Debido a que la distancia r desde el punto P, en el círculo unitario, al origen es igual a uno, la definición de las funciones trigonométricas adopta la siguiente forma:

$$\begin{cases} \operatorname{sen} t = y, & \cos t = x, \quad \tan t = \frac{y}{x}, \\ \cot t = \frac{x}{y}, & \sec t = \frac{1}{x}, \quad \csc t = \frac{1}{y}. \end{cases} \tag{5.1}$$

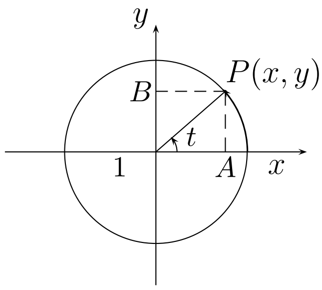


Figura 5.1

Función seno

El dominio de la función $z = \operatorname{sen} t$ es el conjunto de todos los números reales. De acuerdo con la ecuación (4.1) $\operatorname{sen} t$ es la ordenada y del punto P en la circunferencia unitaria. Entonces la variación del segmento $\overline{AP}$, a medida que el valor de t cambia, representa la variación de $\operatorname{sen} t$.

Para entender la variación de la función $z = \operatorname{sen} t$, se acostumbra representar los puntos (t, z) en un sistema de coordenadas rectangulares tz; véase la figura 5.2. Observando la figura 5.1, vemos que mientras el ángulo t está en el primer cuadrante y varía desde $t = 0$ hasta $t = \dfrac{\pi}{2}$, la longitud del segmento $\overline{AP}$ cambia desde 0 hasta el valor 1. Esta información la representamos en la figura 5.2.

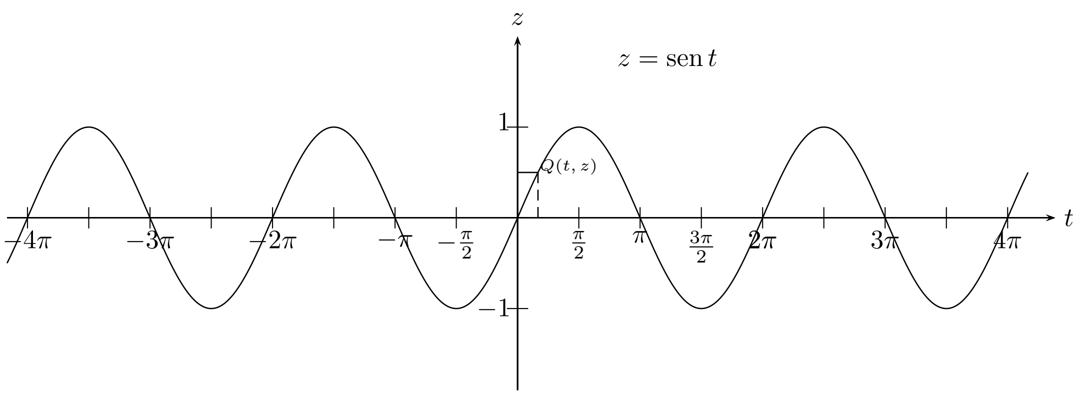


Figura 5.2

Cada punto con coordenadas $Q(t, z)$ en el plano tz, va a interpretarse así: el valor de t es el valor del ángulo y el valor de z es el valor de $\operatorname{sen} t$. Podemos calcular el valor de $\operatorname{sen} t$

de diversas maneras, pero aquí queremos visualizarlo como la ordenada y del punto P en el círculo trigonométrico.

Los puntos (t, z) en la gráfica de $z = \operatorname{sen} t$ en la figura 5.2 cambian de la siguiente forma: si el número real t varía desde cero hasta $\frac{\pi}{2}$, observamos en el sistema de coordenadas xy, figura 5.1, que el ángulo t hace el recorrido en sentido positivo. El punto P se desplaza sobre el círculo trigonométrico en el primer cuadrante. Su ordenada va creciendo desde el valor 0, hasta tomar el valor $y = 1$. Ese es el cambio que se observa en la ordenada z en la figura 5.2, puesto que z representa a $\operatorname{sen} t$.

Si se continúa el recorrido de t desde $\frac{\pi}{2}$ hasta π, la ordenada de P en el círculo trigonométrico va decreciendo desde $y = 1$ hasta llegar a cero.

Al seguir incrementando el valor de t desde π hasta $\frac{3\pi}{2}$, el punto P va girando sobre el círculo trigonométrico en el tercer cuadrante hasta $\frac{3\pi}{2}$; la ordenada de P es negativa y toma todos los valores comprendidos entre 0 y -1; éste es el menor valor posible de $\operatorname{sen} t$.

Después el ángulo t sigue su recorrido por el cuarto cuadrante, la ordenada de P sigue siendo negativa y su valor va aumentando hasta llegar a cero. Todas estas variaciones de la ordenada de P se representan en la figura 5.2, como las variaciones de la ordenada del punto $Q(t, z)$.

De acuerdo con la descripción dada podemos notar que si la variable t se incrementa desde 2π hasta 4π, el punto P en el círculo trigonométrico vuelve a pasar por los mismos puntos que había pasado antes y entonces la función seno se va a repetir cada 2π. Si el giro continúa en la misma dirección sigue repitiéndose el mismo comportamiento en intervalos de tamaño 2π.

Si el giro se hace en sentido negativo, se observa que el comportamiento es en el sentido inverso al anterior: se inicia en el cuarto cuadrante donde t toma valores negativos desde 0 hasta hasta $t = -\frac{\pi}{2}$; mientras esto ocurre, la ordenada del punto P varía desde 0 hasta -1. Miremos como se ve esto en el plano tz, (observe la parte negativa de t).

Cuando t continúa disminuyendo su valor, el punto P en la circunferencia trigonométrica gira en el tercer cuadrante, en el sentido negativo, y su ordenada toma todos los valores desde -1 hasta 0, sigue por el segundo cuadrante empieza a tomar valores positivos hasta 1 y continúa por el primer cuadrante hasta llegar a su punto de partida en donde la ordenada es cero.

Estos giros se hacen indefinidamente. Todo lo anterior se puede visualizar en la figura 5.2, donde representamos la función en el ***intervalo*** $[-4\pi, 4\pi]$.

Observamos que $\operatorname{sen} t$ se repite si tomamos intervalos de la misma longitud. Cuando se repiten los valores de una función en intervalos de la misma longitud, la función se denomina ***periódica***. La longitud del menor intervalo en el cual la gráfica se repite recibe el nombre de ***período***. La función seno es periódica con período 2π. Esto lo podemos representar así:

$$\operatorname{sen}(t + 2\ n\ \pi) = \operatorname{sen} t, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{Z}.$$

Aquí $\mathbb{R}$ es el conjunto de números reales y $\mathbb{Z}$ es el conjunto de los números enteros.

El ***dominio*** de una función es el conjunto en el cual la función se puede definir. El ***rango*** de una función está dado por todos los valores que la función puede tomar. El dominio de la función seno es el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$, y el rango es el intervalo cerrado $[-1, 1]$.

Ejemplo 5.2

1. $\text{sen}(\frac{\pi}{4} + 4\pi) = \text{sen}(\frac{\pi}{4} + 2\pi) = \text{sen}(\frac{\pi}{4})$

2. Encuentre dos ángulos cuyo seno sea igual al seno de (-3).

   Solución

   Como la función seno tiene periodo 2π, podemos tomar cualquier número de la forma $-3 + 2n\pi$, donde n es un número entero que representa el número de giros que hizo el lado final del ángulo correspondiente. Recordemos que éstos pueden ser positivos o negativos, por lo tanto n puede ser negativo o positivo. Así, $t_1 = -3+2\pi$ y $t_2 = -3 - 2\pi$ satisfacen:

$$\text{sen}(-3) = \text{sen}(t_1) = \text{sen}(t_2).$$

Función coseno

De acuerdo con la ecuación (5.1), $\cos t = x$, donde x es la abscisa del punto P en el círculo trigonométrico. Entonces la variación del segmento $\overline{BP}$, a medida que el valor de t cambia, representa la variación de $\cos t$.

Brevemente vamos a presentar la variación de $\cos t$, cuando t varía desde 0 hasta 2π. Cuando $t = 0$, el valor de la abscisa de P es 1; durante el recorrido por el primer cuadrante el valor de la abscisa disminuye hasta llegar al valor cero; cuando el lado final de t continúa por el segundo cuadrante, la abscisa de P es negativa; cuando $t = \pi$ radianes, la abscisa es igual a -1; luego el punto P sigue girando por el tercer cuadrante, la abscisa allí también es negativa. Luego llega al eje vertical en donde la abscisa es cero; pasa al cuarto cuadrante, donde la abscisa es positiva y llega nuevamente a su punto de partida en donde su abscisa es 1.

Así como observamos con la función seno, los giros pueden continuar indefinidamente en sentido positivo o negativo. Cuando se trasladan estos valores al sistema de coordenadas cartesianas tz se obtiene la gráfica de la función coseno. Véase la figura 5.3.

En resumen: el dominio de la función coseno es el conjunto de todos los números reales, la función coseno es periódica y su período es 2π y además el rango de la función coseno es el intervalo cerrado [-1,1].

La variación de la función coseno puede resumirse en la siguiente tabla.

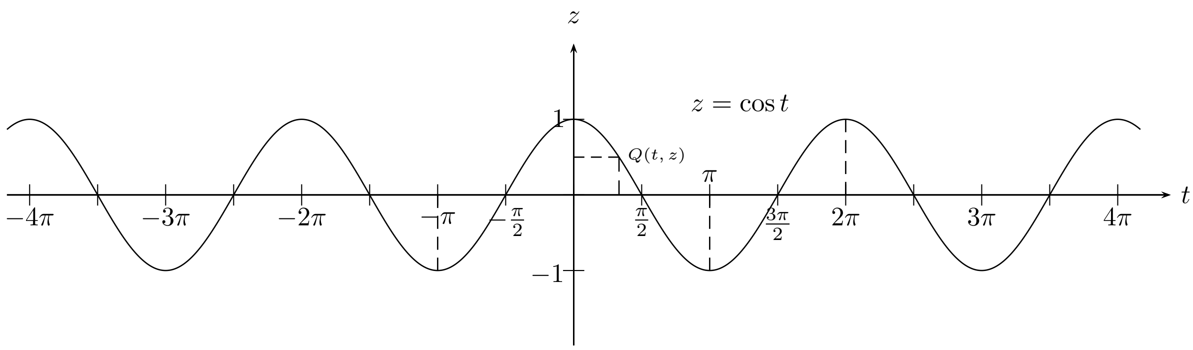


Figura 5.3

t	$y = \cos t$
$0 \to \frac{\pi}{2}$	$1 \to 0$
$\frac{\pi}{2} \to \pi$	$0 \to -1$
$\pi \to \frac{3\pi}{2}$	$-1 \to 0$
$\frac{3\pi}{2} \to 2\pi$	$0 \to 1$

Ejemplo 5.3

1. $\cos(\frac{\pi}{5} + 6\pi) = \cos(\frac{\pi}{5} - 4\pi) = \cos(\frac{\pi}{5})$.
2. Encuentre dos números para los cuales su coseno sea igual a -1.

   Solución

   Sabemos que $\cos \pi = -1$. Usando la periodicidad de la función coseno, los números reales $t_1 = \pi + 4\pi = 5\pi$, y $t_2 = \pi - 8\pi = -7\pi$, satisfacen que $\cos t_1 = \cos t_2 = -1$.

Lección 6

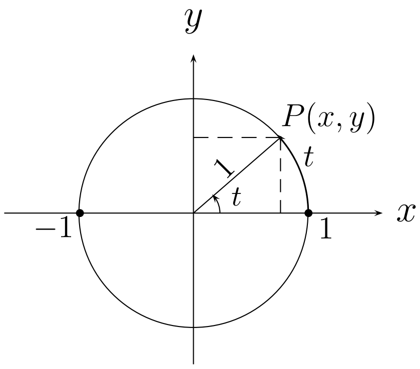
Funciones trigonométricas de números reales II

En esta lección estudiaremos algunas propiedades adicionales acerca de las funciones trigonométricas de números reales. Iniciaremos con la determinación del dominio de las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante y estableceremos el período de las funciones tangente y cotangente. Finalmente construiremos la gráfica de la función tangente y estudiaremos su rango y asíntotas verticales.

Iniciaremos esta lección con el estudio del comportamiento de la función tangente . Para ello vamos a utilizar de nuevo la circunferencia trigonométrica. Primero estudiaremos su período y luego consideraremos su gráfica.

Dominio de las funciones tangente y secante, cotangente y cosecante

Sea t un número real; tomemos el punto $P(x, y)$ en la intersección del lado final de t y la circunferencia unitaria. Véase la figura 6.2. Por las definiciones tenemos:



$$\tan t = \frac{y}{x} \quad \text{y} \quad \sec t = \frac{1}{x}, \quad \text{para } x \neq 0.$$

$$\cot t = \frac{x}{y} \quad \text{y} \quad \csc t = \frac{1}{y}, \quad \text{para } y \neq 0.$$

Figura 6.1

Del dominio de las funciones $\tan t$ y $\sec t$ se deben excluir los números reales t para los cuales el punto P está sobre el eje y. Estos números son los múltiplos impares de $\dfrac{\pi}{2}$ y se representan por $t = (2n+1)\dfrac{\pi}{2}$, para cualquier entero n.

Si denotamos el dominio de las funciones tangente y secante por D_{tan} y D_{sec}, respectivamente, tenemos que

$$D_{tan} = D_{sec} = \{t \in \mathbb{R} / t \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}, \quad \text{para todo} \;\; n \in \mathbb{Z}\}.$$

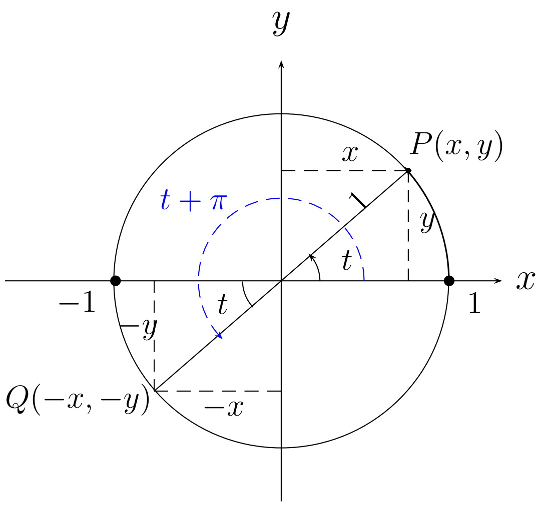
Las funciones $\cot t$ y $\csc t$ no están definidas para los números reales t correspondientes a los ángulos cuyo lado final esté sobre el eje x, debido a que en este eje los puntos tienen ordenada igual a 0. Observamos que estos números reales son el resultado de multiplicar un número entero n por π. Si denotamos el dominio de las funciones cotangente y cosecante por D_{cot} y D_{csc}, respectivamente, tenemos que

$$D_{cot} = D_{csc} = \{t \in \mathbb{R} / t \neq n\,\pi, \quad \text{para todo} \;\; n \in \mathbb{Z}\}.$$

Período de las funciones tangente y cotangente

Sabemos que las funciones trigonométricas son periódicas y su período es menor o igual a 2π. En las lecciones **??** vimos que las funciones seno y coseno tienen efectivamente período 2π. En esta lección veremos que las funciones tangente y cotangente tienen período π.

En la figura 6.2 representamos los ángulos t y $t+\pi$ y los puntos P y Q localizados en la intersección de la circunferencia unitaria y los lados finales de t y $t+\pi$, respectivamente. Es decir, $P(x,y)$ está sobre el lado final de t y $Q(-x,-y)$ está sobre el lado final de $t+\pi$. Así:



$$\tan(t+\pi) = \frac{-y}{-x} = \frac{y}{x} = \tan t,$$

$$\cot(t+\pi) = \frac{-x}{-y} = \frac{x}{y} = \cot t.$$

Figura 6.2

Concluimos que la funciones tangente y cotangente son periódicas con período π.

En general podemos escribir:

$$\tan(t+k\pi) = \tan t, \quad \text{para todo } t \in D_{tan} \text{ y para todo entero } \; k,$$

$$\cot(t+k\pi) = \cot t, \quad \text{para todo } t \in D_{cot} \text{ y para todo entero } \; k.$$

Propiedades y gráfica de la función tangente

Para la representación gráfica de la función tangente vamos a utilizar nuevamente la circunferencia unitaria. Tendremos en cuenta las siguientes propiedades:

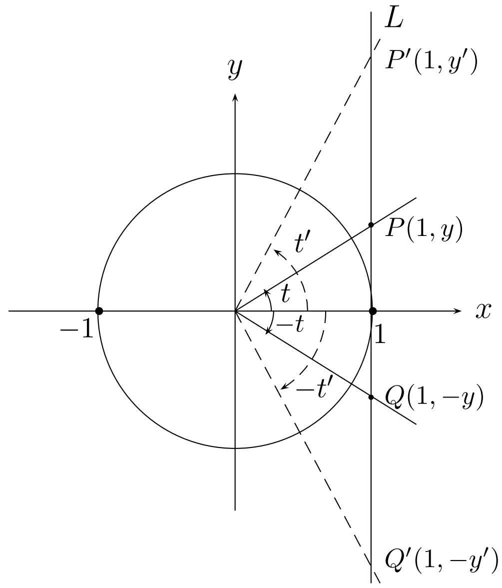
- Como la función tangente tiene período π es suficiente considerar los ángulos en el primer y el segundo cuadrante o en el primer y el cuarto cuadrante.
- La función tangente satisface que:

$$\tan(-t) = -\tan t \text{ para todo número real } \ t \in D_{tan}. \tag{6.1}$$

La igualdad (6.1) simplica la construcción de la gráfica de la función tangente. Observe que cuando t está en el intervalo $[0, \frac{\pi}{2})$, el ángulo t está en el primer cuadrante y el ángulo $-t$ está en el cuarto cuadrante. Así, nosotros podemos considerar los números reales t en el intervalo semiabierto $[0, \frac{\pi}{2})$ y estudiar los valores que toman $\tan t$ y $-\tan t$. Estos últimos por (6.1) corresponden a $\tan(-t)$, es decir, a la tangente de los ángulos en el cuarto cuadrante.

En la figura 6.3 se representan el ángulo t y la circunferencia unitaria. Recordemos que para definir $\tan t$ podemos seleccionar cualquier punto en el lado final del ángulo t. Para analizar el valor de $\tan t$, tomamos como punto de referencia el punto P, el cual es el punto de intersección del lado final del ángulo t y la recta vertical L tangente a la circunferencia en el punto de coordenadas $(1, 0)$.

Como $\tan t = \frac{y}{1} = y$, el valor de la ordenada de P es igual a $\tan t$ y la ordenada de Q, $-y$, representa el valor de $-\tan t = \tan(-t)$. Vamos a analizar la variación de la función $\tan t$ como la variación de las ordenadas de los puntos P y Q



$$\tan t = \frac{y}{1} = y,$$

$$\tan(-t) = -\frac{y}{1} = -y.$$

Figura 6.3

A medida que t aumenta desde 0 hasta $\frac{\pi}{2}$, el punto P se desplaza sobre la recta L, desde el punto de coordenadas (1,0), hacia arriba; entonces $\tan t$ aumenta a partir de $\tan 0 = 0$

y crece indefinidamente cuando t se acerca a $\dfrac{\pi}{2}$. Al mismo tiempo la ordenada de Q varía desde 0 y decrece continuamente a medida que t aumenta, (ó $-t$ disminuye), decreciendo sin límite cuando el ángulo $-t$ se acerca a $-\frac{\pi}{2}$.

Cuando $t = \frac{\pi}{2}$, el lado final del ángulo t está sobre el eje y y no corta a la recta tangente L, pues son rectas paralelas. Recordemos que $t = \frac{\pi}{2}$, no está en el dominio de la función tangente.

Para trazar la gráfica de la función $z = \tan t$, en el plano cartesiano tz, utilizamos el eje horizontal para los valores de la variable independiente t y el eje vertical para sus imágenes. En la figura 6.4 aparece la gráfica de la función tangente correspondiente al intervalo abierto $(-\dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2})$.

La gráfica en el intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ es el ***ciclo fundamental de la función tangente***. Para obtener la gráfica de la función en intervalos mayores repetimos el ciclo fundamental a lo largo del eje horizontal, a la derecha y la izquierda del intervalo $(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2})$, en intervalos de longitud π.

Debido a que la función tangente es una función impar, su gráfica es simétrica respecto al origen de coordenadas.

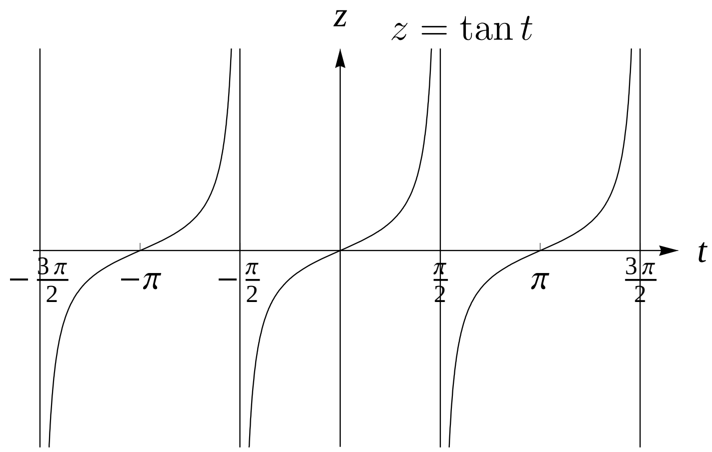


Figura 6.4

En la gráfica se observan rectas verticales en los puntos de la forma $t = (2n+1)\frac{\pi}{2}$. Estas rectas que son llamadas ***asíntotas verticales***, nunca cortan la gráfica de la función tangente.

Gráficamente se puede encontrar el rango de una función, haciendo una proyección de su gráfica, en un sistema de coordenadas rectangulares, sobre el eje de las variables dependientes. Los puntos obtenidos a partir de esta proyección constituyen su rango. Recordemos que para proyectar un punto sobre una recta se traza la perpendicular desde el punto a la recta.

Si realizamos este procedimiento para la función tangente, vemos que se cubre todo el eje vertical, esto implica que el rango de la función tangente es el conjunto de los números reales.

Conclusiones

1. Al dominio de la tangente no pertenecen los múltiplos impares de $\frac{\pi}{2}$.
2. El período de la tangente es π.
3. El rango de la función tangente es el conjunto de los números reales

Lección 7

Funciones trigonométricas de números reales III

En esta lección analizaremos el comportamiento y gráficas de las funciones sinosoidales de la forma: $y = a \operatorname{sen}(bx + c)$ y $y = a \cos(bx + c)$, donde a, b y c son números reales constantes.

Funciones sinosoidales de la forma: $y = a \operatorname{sen} bx$ y $y = a \cos bx$

Estas funciones se utilizan en la descripción de problemas que siguen un modelo de movimiento periódico y en fenómenos del mundo real que involucran situaciones que se repiten en ciclos.

Dilatación y compresión de las gráficas de las funciones sinosoidales

Dada una función sinosoidal y=f(x), la ***amplitud*** de f denotada por A se define como

$$A = \frac{1}{2} \,(\text{máximo de } f(x) - \text{ minimo de } f(x))$$

Ejemplo 7.1

La amplitud de las funciones $y = \operatorname{sen} x$ y $y = \cos x$ es igual a 1, debido a que el valor máximo que toman estas funciones 1 y su mínimo valor es -1. Así, $A = \frac{1}{2}(1 - (-1)) = 1$.

Vamos a analizar la amplitud de las funciones $y = a \operatorname{sen} x$ y $y = a \cos x$. Sabemos que

$$-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1 \quad \text{y} \quad -1 \leq \cos x \leq 1. \tag{7.1}$$

Si $a > 0$, al multiplicar por a las desigualdades en (7.1) obtenemos

$$-a \leq a \operatorname{sen} x \leq a \quad \text{y} \quad -a \leq a \cos x \leq a$$

Por lo tanto el valor máximo que toman las funciones $y = a \ \operatorname{sen} x$ y $y = a \cos x$ es a y el valor mínimo es $-a$ y la amplitud es $A = a$.

Si $a < 0$, debemos tener en cuenta que el multiplicar los términos de una desigualdad por un número negativo, la desigualdad cambia de sentido; así multiplicando todos los términos de las desigualdades en (7.1) por $-a$ obtenemos

$$a \leq a \operatorname{sen} x \leq -a \quad \text{y} \quad a \leq a \cos x \leq -a.$$

La amplitud es $A = \frac{1}{2}(-a - a) = -a$

En resumen: la amplitud de las funciones definidas por $y = a \operatorname{sen} x$ y $y = a \cos x$ es |a|.

Ejemplo 7.2

1. La función definida por $y = 7 \operatorname{sen} x$ tiene como amplitud $|7| = 7$.
2. $y = -\sqrt{3} \cos x$, tiene como amplitud $|-\sqrt{3}| = \sqrt{3}$.

Dilatación y compresión vertical de las gráficas

Observemos que las ordenadas de los puntos de la gráfica de la función $y = af(x)$ son las ordenadas de los puntos P de la gráfica de la función $y = f(x)$ multiplicadas por a, mientras que las abscisas de P no sufren ninguna modificación.

Supongamos que $a > 0$:

- Si $a > 1$, el valor de cada ordenada aumenta y la gráfica de $y = af(x)$ muestra ***una dilatación*** o ***alargamiento*** en el sentido vertical en una proporción de a unidades, con respecto a la gráfica de $y = f(x)$.
- Si $0 < a < 1$, el valor de la ordenada disminuye y la gráfica de $y = af(x)$ presenta una ***compresión*** en el sentido vertical, en una proporción de a unidades con respecto a la gráfica de $y = f(x)$.

Ejemplo 7.3

En la figura 7.1 se representan las gráficas de las funciones definidas por $y = 2 \operatorname{sen} x$ y $y = \operatorname{sen} x$. Observamos que las ordenadas están multiplicadas por 2 y no hay cambios en las abscisas. La amplitud es 2.

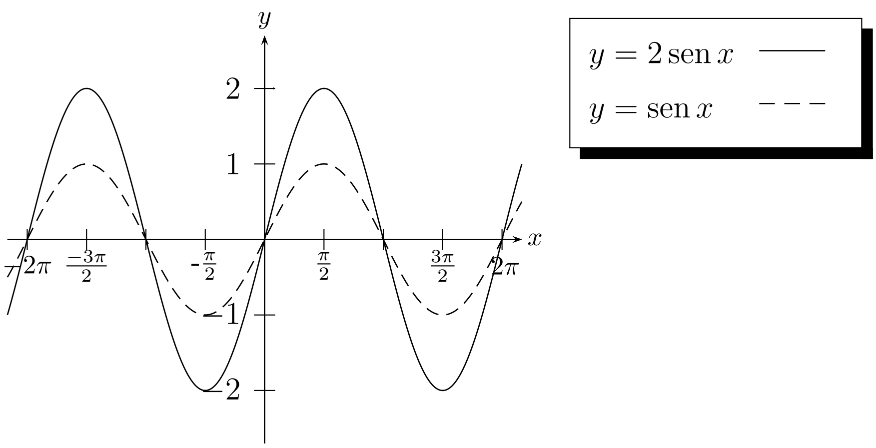


Figura 7.1

Reflexión con respecto al eje horizontal

Si el número a por el cual se multiplica la función f es negativo, se obtiene ***una reflexión*** con respecto del eje de las abscisas, debido a que las ordenadas de los puntos de la gráfica quedan multiplicadas por un número negativo.

- Si $a < -1$, la gráfica se amplia en el sentido vertical en una proporción de $|a|$ unidades y se ***refleja con respecto al eje horizontal***.
- Si $0 > a > -1$, la gráfica se contrae en el sentido vertical en una proporción de $|a|$ unidades y se refleja con respecto al eje horizontal.

Ejemplo 7.4

En la figura 7.2 aparecen las gráficas de la funciones $y = 2 \operatorname{sen} x$ y $y = -2 \operatorname{sen} x$. La segunda es una reflexión de la primera con respecto al eje x.

Solución

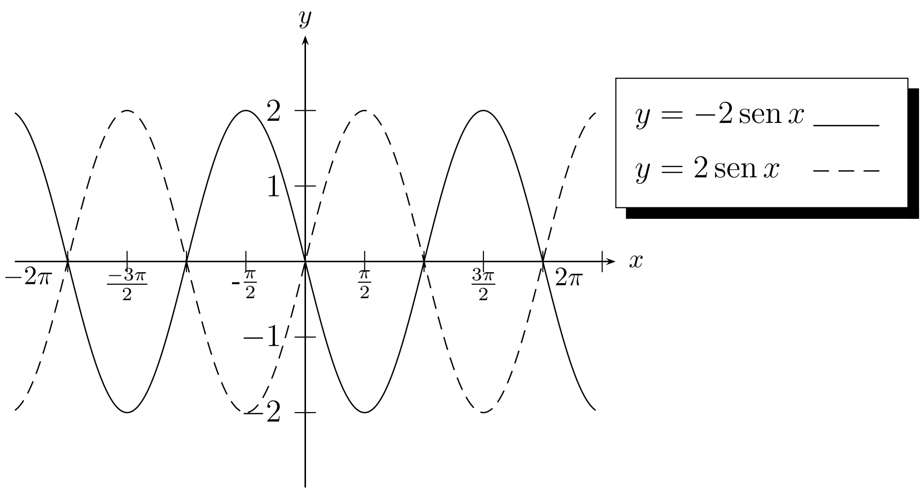


Figura 7.2

Reflexión respecto al eje vertical

Si una función está definida como $y = f(x)$, la gráfica que se obtiene al reflejar su gráfica con respecto al eje vertical es la gráfica de la función $y = f(-x)$.

Recordemos las igualdades del ángulo opuesto estudiadas en la lección 4 :

$$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x, \quad \cos(-x) = \cos x, \quad \tan(-x) = -\tan x.$$

La gráfica de la función $y = \cos x$ coincide con su reflexión respecto al eje vertical.

Las gráficas que se obtienen al reflejar las funciones seno o tangente respecto al eje vertical son iguales, respectivamente, a las que se obtienen por su reflexión respecto al eje horizontal.

Ejemplo 7.5

En la figura 7.3 se muestran las gráficas de la función $y = \tan t$, en líneas punteadas, y de la función $y = \tan(-t) = -\tan t$; esta última es la reflexión de la primera función respecto al eje vertical y.

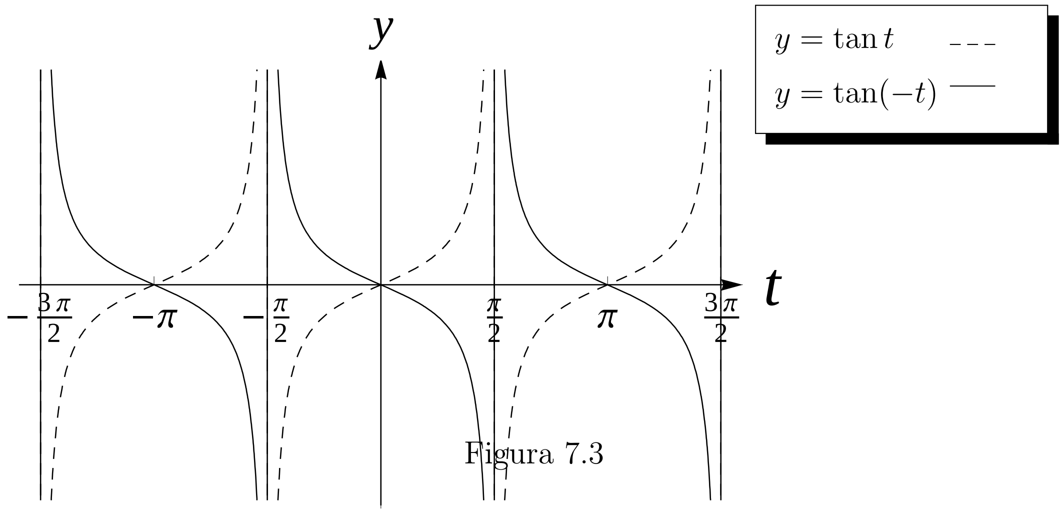


Figura 7.3

Período de las funciones $a \operatorname{sen} bx$ y $a \cos bx$

Supondremos que el coeficiente b de la variable x es positivo, esto es $b > 0$. Esta suposición es suficiente para estudiar todos los casos, debido a las propiedades que conocemos sobre ángulos opuestos:

$$\operatorname{sen}(-bx) = -\operatorname{sen} bx; \quad \cos(-bx) = \cos bx.$$

Para calcular el período de las funciones $\operatorname{sen} bx$ y $\cos bx$ observamos que los valores tomados por estas funciones deben repetirse en intervalos de longitud 2π, para la variable independiente bx. Así,

$$0 \leq bx \leq 2\pi.$$

Como $b > 0$, al dividir por b tenemos,

$$0 \leq x \leq \frac{2\pi}{b}.$$

Por lo tanto el ciclo completo o fundamental de las funciones $a \operatorname{sen} bx$ y $a \cos bx$ es la porción de las gráficas definidas en el intervalo cerrado $[0, \frac{2\pi}{b}]$. Esto implica que el período de estas funciones es $p = \frac{2\pi}{b}$.

Ejemplo 7.6

El período de la función $\operatorname{sen} 2x$ es $p = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

Ejemplo 7.7

En cada uno de las funciones dadas, encuentre su amplitud y su período:

1. $y = -\frac{1}{4} \operatorname{sen} \frac{x}{2}$,

2. $y = 2\operatorname{sen} 3x$,
3. $y = -\sqrt{3}\cos 2x$.

Solución

1. $y = -\frac{1}{4}\operatorname{sen}\frac{x}{2}$ tiene como amplitud $A = |-\frac{1}{4}| = \frac{1}{4}$.

   Para hallar el período, observamos que el coeficiente de x es $\frac{1}{2}$. Encontramos entonces que el período de la función es: $p = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$.

2. La función definida por $y = 2\operatorname{sen}3x$ tiene como amplitud $A = 2$ y como período $p = \frac{2\pi}{3}$.

3. $y = -\sqrt{3}\cos 2x$ tiene como amplitud $A = |-\sqrt{3}| = \sqrt{3}$ y su período es $p = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

Ejemplo 7.8

Represente gráficamente la función $y = -\cos 2x$, en el intervalo cerrado $[-\pi, 2\pi]$

Solución

El período de la función $y = -\cos 2x$ es

$$\frac{2\pi}{2} = \pi.$$

Trazamos primero la gráfica de la función $y = \cos 2x$, representada en la parte izquierda de la figura 7.4 y después la reflejamos con respecto al eje horizontal, para obtener la gráfica de la función $y = -\cos 2x$ la cual aparece en la parte derecha de la figura 7.4.

El ciclo fundamental de función $y = \cos 2x$ es la porción de gráfica en el intervalo $[0, \pi]$. La gráfica se repite en intervalos de longitud π. Tenemos en cuenta que en el ciclo fundamental de la función coseno, la gráfica corta dos veces al eje de las abscisas, tiene un valor máximo 1 y un valor mínimo -1. Nuestro objetivo inicial es buscar los puntos de corte de la gráfica de la función $y = \cos 2x$ con el eje x y los puntos en los que se encuentran el máximo y el mínimo de la función en el intervalo $[0, \pi]$.

$$\cos 2x = 0 \quad \text{si} \quad 2x = \frac{\pi}{2} \quad \text{ó} \quad 2x = \frac{3\pi}{2}.$$

Entonces la gráfica va a cortar al eje x, en $x = \frac{\pi}{4}$ y en $x = \frac{3\pi}{4}$.

El máximo se presenta cuando $\cos 2x = 1$. Así, $2x = 0$, y por tanto $x = 0$. El mínimo ocurre cuando $\cos 2x = -1$. Por ser $2x = \pi$, tenemos que $x = \frac{\pi}{2}$.

Trazamos la gráfica de la función $y = \cos 2x$ en el intervalo cerrado $[0, \pi]$. Luego hacemos la reflexión con respecto al eje horizontal para obtener la gráfica de la función $y = -\cos 2x$. Véase la parte derecha de la figura 7.4.

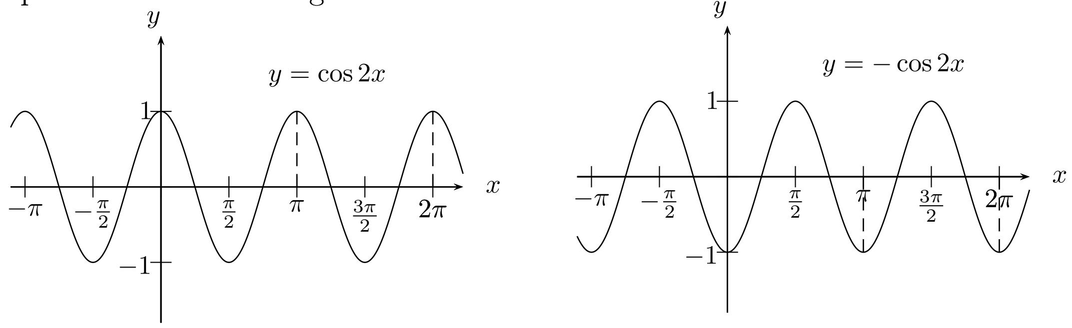


Figura 7.4

Ejemplo 7.9

La figura 7.5 muestra la gráfica de la función: $y = 2\operatorname{sen} 3x$

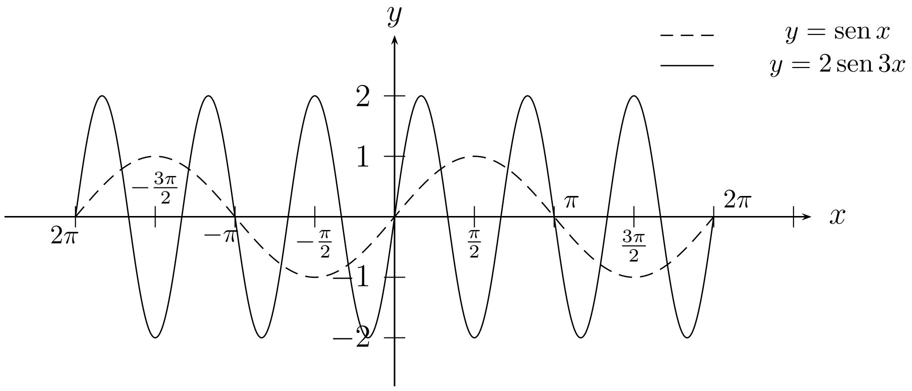


Figura 7.5

Observamos las siguientes características: Amplitud: $A = 2$, período: $p = \frac{2\pi}{3}$.

Funciones $y = a\operatorname{sen}(bx + c)$ y $y = a\cos(bx + c)$ y sus gráficas

Para analizar estas funciones tenemos que considerar su amplitud, período y desfasamiento. Recordemos que siempre consideramos $b > 0$. La amplitud es $|a|$, el período es $\frac{2\pi}{b}$.

Para determinar el desfasamiento escribimos las funciones en la forma:

$$y = a\operatorname{sen} b(x + \frac{c}{b}) \text{ y } y = a\cos b(x + \frac{c}{b}).$$

Observamos que las gráficas de las funciones $y = a\operatorname{sen} bx$ y $y = a\cos bx$ se han desplazado horizontalmente $\frac{c}{b}$ unidades a la izquierda si $c > 0$ y si $c < 0$ hay un desplazamiento horizontal de $-\frac{c}{b}$ unidades a la derecha.

Para las funciones $y = a\operatorname{sen}(bx+c)$ y $y = a\cos(bx+c)$ se define el desplasamiento de fase por $-\frac{c}{b}$.

Ejemplo 7.10

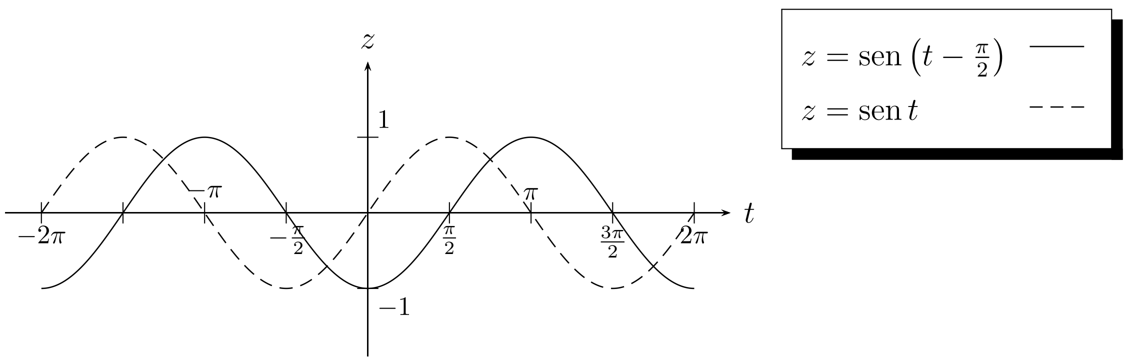


Figura 7.6

En la figura 7.6 representamos las gráficas de las funciones $y = \operatorname{sen} t$ y $y = \operatorname{sen}(t - \frac{\pi}{2})$. Observe que la gráfica de la segunda función es un desplazamiento horizontal de la gráfica de $y = \operatorname{sen} t$, $\dfrac{\pi}{2}$ unidades hacia la derecha. El desplazamiento de fase es igual a $\frac{\pi}{2}$. Cuando este número es positivo se puede interpretar geometricamente como la longitud del segmento que separa horizontalmente ambas gráficas. Los valores del rango de las dos funciones coinciden, siempre y cuando el intervalo en el cual se considere cada una de las funciones tenga una longitud mayor o igual al período de la función.

Ejemplo 7.11

En la figura 7.7 se hace la representación gráfica de la funciones $y = \operatorname{sen} x$ y $y = -3\operatorname{sen}(2x - \frac{\pi}{3})$.

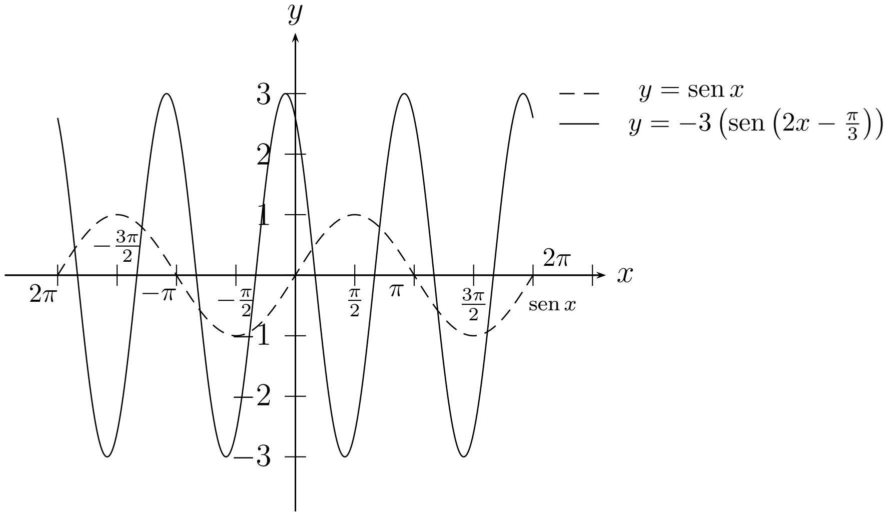


Figura 7.7

Características: amplitud: $A = 3$, período: $p = \frac{2\pi}{3}$, desplazamiento de fase: $\frac{\pi}{6}$ unidades a la derecha.

Lección 8

Identidades trigonométricas

En esta lección estudiaremos un tipo especial de igualdades, conocidas como identidades trigonométricas. Estas identidades juegan un papel muy importante en el Cálculo, en la Física y en otras ciencias, donde se usan para simplificar expresiones complicadas.

Una ***identidad*** es una igualdad entre expresiones que es válida para todos los valores de las variables para las cuales están definidas las expresiones involucradas en la igualdad.

Se llama ***identidad trigonométrica*** a una identidad que contiene expresiones trigonométricas.

Una igualdad que involucra expresiones trigonométricas y no es una identidad se llama ***ecuación condicionada*** o simplemente ***ecuación***.

Por ejemplo, la siguiente igualdad es una identidad ya que es válida para todo número real x:

$$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1.$$

Mientras que la igualdad $x^2 - 1 = 0$ es una ecuación puesto que solamente es válida para los valores $x = 1$ y $x = -1$.

Notación: se denotará por $\operatorname{sen}^n t$ a la expresión $(\operatorname{sen} t)^n$ y en la misma forma se escribirán las n-ésimas potencias de las otras funciones trigonométricas.

Identidades fundamentales

Estas son las identidades básicas. Algunas de ellas han sido consideradas antes.

- **Identidades de cociente**

$$\tan t = \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t}, \qquad \cot t = \frac{\cos t}{\operatorname{sen} t}.$$

- **Identidades recíprocas**

$$\csc t = \frac{1}{\operatorname{sen} t}, \qquad \sec t = \frac{1}{\cos t},$$
$$\cot t = \frac{1}{\tan t}.$$

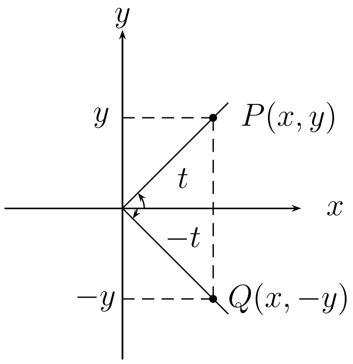
- **Identidades pitagóricas**

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t &= 1, \\ 1 + \tan^2 t &= \sec^2 t, \\ 1 + \cot^2 t &= \csc^2 t. \end{aligned}$$

- **Identidades del ángulo** $(-t)$

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(-t) &= -\operatorname{sen} t, & \cos(-t) &= \cos t, \\ \tan(-t) &= -\tan t, & \cot(-t) &= -\cot t, \\ \sec(-t) &= \sec t, & \csc(-t) &= -\csc t. \end{aligned}$$

Las identidades trigonométricas fundamentales se deducen inmediatamente a partir de las definiciones de las funciones trigonométricas. En la figura 8.1, el punto $P(x, y)$ está en el lado final del ángulo t, el punto $Q(x, -y)$ está en el lado final del ángulo $-t$. Las definiciones de las funciones trigonométricas aparecen en el lado derecho de la figura 8.1.



$$\begin{aligned} \operatorname{sen} t &= \frac{y}{r}, & \cos t &= \frac{x}{r} & \tan t &= \frac{y}{x}, \\ \cot t &= \frac{x}{y}, & \sec t &= \frac{r}{x} & \csc t &= \frac{r}{y}. \end{aligned} \tag{8.1}$$

Figura 8.1

Ejemplo 8.1

Demostremos algunas de las identidades fundamentales. Véase la figura 8.1.

- $\cot t = \dfrac{\cos t}{\operatorname{sen} t}$.

  Solución

$$\cos t = \frac{x}{r}, \quad \operatorname{sen} t = \frac{y}{r},$$

$$\frac{\cos t}{\operatorname{sen} t} = \frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}} = \frac{y}{x} = \cot t.$$

- $\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$.

  Solución

$$\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = \frac{y^2}{r^2} + \frac{x^2}{r^2} = \frac{y^2 + x^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = 1.$$

- $1 + \cot^2 t = \csc^2 t$.

  Solución
  $1 + \cot^2 t = 1 + \dfrac{x^2}{y^2} = \dfrac{y^2 + x^2}{y^2} = \dfrac{r^2}{y^2} = \csc^2$.

Dada una igualdad el problema de verificar que es una identidad consiste en probar que esta igualdad es verdadera para todos los valores de la variable. El procedimiento consistirá en seleccionar uno de los lados de la igualdad y por medio de las identidades fundamentales o alguna identidad ya conocida y de manipulaciones algebraicas obtener el otro lado de la igualdad.

Ejemplo 8.2

Verifique cada identidad.

1. $\cos t\ (\tan t + \cot t) = \csc t$.

   Solución

   Una buena idea es reemplazar las funciones trigonométricas en términos de las funciones seno y coseno. También es buena idea efectuar los productos indicados y simplificar al máximo las fracciones. En este caso, para iniciar, seleccionamos el lado izquierdo de la igualdad por ser más elaborado y contener más operaciones para realizar. Así,

$$\begin{aligned}\cos t\ \left(\ \tan t + \cot t\ \right) &= \cos t \left(\frac{\operatorname{sen} t}{\cos t} + \frac{\cos t}{\operatorname{sen} t}\right) = \cos t \cdot \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t} + \cos t \cdot \frac{\cos t}{\operatorname{sen} t}\\ &= \operatorname{sen} t + \frac{\cos^2 t}{\operatorname{sen} t} = \frac{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t}{\operatorname{sen} t} = \frac{1}{\operatorname{sen} t} = \csc t.\end{aligned}$$

   Con este procedimiento hemos verificado la identidad: $\cos t\ (\tan t + \cot t) = \csc t$.

2. $\sec^4 t - \sec^2 t = \tan^4 t + \tan^2 t$.

   Solución

   En este caso, al observar las potencias pares de las funciones tangente y secante que aparecen en la igualdad, vemos que una buena estrategia es utilizar la correspondiente identidad pitagórica $1 + \tan^2 t = \sec^2 t$. Los dos lados de la igualdad parecen apropiados para iniciar la verificación. Tomemos el lado derecho de la igualdad. Observemos que en el lado izquierdo no aparece ningún término que involucre la función tangente. Entonces debemos reemplazar en términos de la función secante

$$\tan^4 t + \tan^2 t = tan^2 t\ (tan^2 t + 1) = (\sec^2 t - 1)(\sec^2 t) = \sec^4 t - \sec^2 t.$$

   Hemos iniciado el procedimiento con el lado derecho de la igualdad y hemos obtenido al final el lado izquierdo de la igualdad, verificándose la identidad.

Fórmulas de adición y sustracción

$$\begin{aligned}
\cos(s+t) &= \cos s\cos t - \operatorname{sen} s\operatorname{sen} t,\\
\cos(s-t) &= \cos s\cos t + \operatorname{sen} s\operatorname{sen} t,\\
\operatorname{sen}(s+t) &= \operatorname{sen} s\cos t + \cos s\operatorname{sen} t,\\
\operatorname{sen}(s-t) &= \operatorname{sen} s\cos t - \cos s\operatorname{sen} t,\\
\tan(s+t) &= \frac{\tan s+\tan t}{1-\tan s\tan t},\\
\tan(s-t) &= \frac{\tan s-\tan t}{1+\tan s\tan t}.
\end{aligned}$$

La demostración de la primera igualdad requiere un procedimiento de construcción geométrica un poco laborioso. Su demostración aparece en el Apéndice. A partir de esta identidad podemos verificar fácilmente las otras identidades. Algunas de ellas son consideradas en el ejemplo 8.3.

Ejemplo 8.3

Verifique las siguientes identidades

1. $\cos(s-t) = \cos s\cos t + \operatorname{sen} s\operatorname{sen} t$.
2. $\cos(\frac{\pi}{2}-t) = \operatorname{sen} t$.
3. $\operatorname{sen}(s+t) = \operatorname{sen} s\cos t + \cos s\operatorname{sen} t$.
4. $\tan(s+t) = \dfrac{\tan s+\tan t}{1-\tan s\tan t}$.

Solución

1. Partimos del lado izquierdo de la igualdad y utilizaremos la identidad del coseno de una suma de ángulos y las identidades del ángulo $(-t)$.

$$\begin{aligned}
\cos(s-t) &= \cos(s+(-t)) = \cos s\cdot\cos(-t) - \operatorname{sen} s\cdot\operatorname{sen}(-t) = \cos s\cdot\cos t - \operatorname{sen} s\cdot(-\operatorname{sen} t)\\
&= \cos s\cdot\cos t + \operatorname{sen} s\cdot\operatorname{sen} t.
\end{aligned}$$

2. Partimos del lado izquierdo de la igualdad y utilizaremos la identidad del coseno de una diferencia de ángulos

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cdot\cos t + \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\operatorname{sen} t = 0\cdot\cos t + (1)\cdot\operatorname{sen} t = \operatorname{sen} t.$$

3. Vamos a utilizar la identidad del numeral 2

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(s+t) &= \cos\left(\frac{\pi}{2}-(s+t)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-s\right)-t\right)\\
&= \cos\left(\frac{\pi}{2}-s\right)\cdot\cos t + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-s\right)\cdot\operatorname{sen} t\\
&= \operatorname{sen} s\cos t \ + \ \cos\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}-s\right)\right)\cdot\operatorname{sen} t = \operatorname{sen} s\cos t + \cos s\operatorname{sen} t.
\end{aligned}$$

4. Partimos del lado izquierdo de la igualdad:

$$\tan(s+t) = \frac{\operatorname{sen}(s+t)}{\cos(s+t)} = \frac{\operatorname{sen} s \cos t + \cos s \operatorname{sen} t}{\cos s \cos t - \operatorname{sen} s \operatorname{sen} t}.$$

Dividimos el numerador y denominador por la expresión $\cos s \cos t$. Entonces

$$\tan(s+t) = \frac{\dfrac{\operatorname{sen} s \cos t}{\cos s \cos t} + \dfrac{\cos s \operatorname{sen} t}{\cos s \cos t}}{1 - \dfrac{\operatorname{sen} s \operatorname{sen} t}{\cos s \cos t}} = \frac{\tan s + \tan t}{1 - \tan s \tan t}.$$

Identidades de ángulos dobles

- $\operatorname{sen} 2t = 2 \operatorname{sen} t \cos t$,
- $\cos 2t = \cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t$,
- $\tan 2t = \frac{2\tan t}{1-\tan^2 t}$,
- $\cos 2t = 2\cos^2 t - 1$,
- $\cos 2t = 1 - 2\operatorname{sen}^2 t$.

Las tres primeras identidades se deducen inmediatamente de las identidades para suma de ángulos, al escribir $2t = t + t$. Las identidades cuarta y quinta se deducen de la segunda combinada con la identidad pitagórica $\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$.

Ejemplo 8.4

Las siguientes identidades son inmediatas a partir de las identidades de ángulos dobles:

$$\operatorname{sen}^2 t = \frac{1 - \cos 2t}{2}.$$
$$\cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2}.$$

Ejercicio 8.1

Calcule $\operatorname{sen} 75°$, utilizando las funciones seno y coseno de los ángulos $30°$ y $45°$.

Observación. Para probar que una igualdad dada no es una identidad, debemos encontrar al menos un valor de la variable para el cual no se satisface la igualdad.

Ejemplo 8.5

Demostremos que la igualdad $\tan x + \cot x = 0$, no es una identidad.

Consideremos el valor $x = \frac{\pi}{4}$. Entonces $\tan\frac{\pi}{4} + \cot\frac{\pi}{4} = 1 + 1 = 2$. Luego por no verificarse la igualdad para un valor de la variable, la igualdad no es una identidad.

Lección 9

Ecuaciones trigonométricas

En esta lección estudiaremos la solución de ecuaciones trigonométricas, para lo cual es de vital importancia el manejo de las identidades trigonométricas estudiadas en la lección anterior.

Una ***ecuación trigonométrica*** es una igualdad que contiene expresiones trigonométricas. A diferencia de las identidades trigonométricas, esta igualdad no tiene que satisfacerse para todos los valores posibles de las variables.

En la mayoría de los casos nos interesa encontrar aquellos valores de la variable para los cuales se satisface la igualdad. Esto es lo que se conoce como ***resolver la ecuación***. Los valores de las variables que satisfacen la igualdad se llaman ***soluciones*** de la ecuación.

Generalmente la variable de la ecuación es un número real, con el cual se representa el valor de un ángulo dado en radianes.

Es importante tener en cuenta las siguientes observaciones:

1. Siempre es necesario mirar el conjunto en el cual estamos buscando la solución. En caso de que no se conozca este conjunto, suponemos que éste es el conjunto de los números reales.

2. Podemos aplicar todas las reglas para simplificar y resolver ecuaciones algebraicas.

3. Es importante recordar que las funciones trigonométricas pueden tener el mismo valor en cuadrantes diferentes, por lo cual hay que tener cuidado de tomar todos los valores posibles del ángulo.

4. Como las funciones trigonométricas son periódicas entonces es necesario considerar todos los valores posibles teniendo en cuenta el número de vueltas, añadiendo a las soluciones un múltiplo cualquiera de 2π, es decir, un número de la forma $2\pi k$, con k entero.

5. Al efectuar operaciones algebraicas tales como elevar a una potencia, o multiplicar por un factor dado, pueden introducirse soluciones extrañas, es decir, soluciones que realmente no satisfacen la ecuación original. Por este motivo es necesario verificar las soluciones en la ecuación original.

Ejemplo 9.1

Determine si $x = \frac{\pi}{2}$ es solución de la ecuación $\operatorname{sen}(x + \frac{\pi}{2}) = -1$. ¿Es $x = \pi$ una solución de la ecuación?

Solución

Reemplazamos x por $\frac{\pi}{2}$ en la ecuación dada. El resultado es

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\operatorname{sen}(\pi)=0\neq -1.$$

Concluimos que $\frac{\pi}{2}$ no es solución. Ahora reemplazamos x por π en la ecuación dada. El resultado es

$$\operatorname{sen}\left(\pi+\frac{\pi}{2}\right)=\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-1.$$

Así $x=\pi$ es una solución de la ecuación dada.

Ejemplo 9.2

Resolver la ecuación $2\cos x=\cot x$, para $0\leq x\leq 2\pi$.

Solución

Primero hacemos transformaciones para simplificar la ecuación:

$$\begin{aligned}
2\cos x-\cot x=\cos x\left(2-\frac{1}{\operatorname{sen} x}\right)&=0,\\
\cos x=0 \quad \text{ó} \quad \left(2-\frac{1}{\operatorname{sen} x}\right)&=0,\\
\cos x=0 \quad \text{ó} \quad 2\operatorname{sen} x-1&=0,\\
\cos x=0 \quad \text{ó} \quad \operatorname{sen} x&=\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Consideramos ahora las soluciones de las ecuaciones simplificadas en el intervalo $0\leq x\leq 2\pi$.

- $\cos x=0$. Resultado: $x=\frac{\pi}{2}$ ó $x=\frac{3\pi}{2}$.
- $\operatorname{sen} x=\frac{1}{2}$. Resultado: $x=\frac{\pi}{6}$ ó $x=\frac{5\pi}{6}$.

Verifiquemos ahora nuestros resultados reemplazando los valores de x en la ecuación original

- $x=\frac{\pi}{2}$: $2\cos(\frac{\pi}{2})=0=\cot(\frac{\pi}{2})$.
- $x=\frac{3\pi}{2}$: $2\cos(\frac{3\pi}{2})=0=\cot(\frac{3\pi}{2})$.
- $x=\frac{\pi}{6}$: $2\cos(\frac{\pi}{6})=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}=\cot(\frac{\pi}{6})$.
- $x=\frac{5\pi}{6}$: $2\cos(\frac{5\pi}{6})=2\cdot(-\frac{\sqrt{3}}{2})=-\sqrt{3}=\cot(\frac{5\pi}{6})$.

Así, todos los valores de x que obtuvimos son soluciones de la ecuación.

Respuesta: Las soluciones de la ecuación $2\cos x=\cot x$, para $0\leq x\leq 2\pi$ son: $x=\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{3\pi}{2}$, $x=\frac{\pi}{6}$ y $x=\frac{5\pi}{6}$.

Ejemplo 9.3

Resuelva la siguiente ecuación trigonométrica $\csc^2 x = 2\cot^2 x$, para x en el conjunto de los números reales.

Solución

Primero hacemos transformaciones para simplificar la ecuación.

$$\csc^2 x - 2\cot^2 x = 1 + \cot^2 x - 2\cot^2 x = 1 - \cot^2 x = 0,$$

$$\cot^2 x = 1,$$

$$\cot x = 1 \quad \text{ó} \quad \cot x = -1.$$

Recordemos que la función cotangente es periódica con período π. Consideramos ahora las soluciones de las ecuaciones simplificadas en el intervalo $0 \leq x \leq \pi$.

- $\cot x = 1$. Resultado: $x = \frac{\pi}{4}$.
- $\cot x = -1$. Resultado: $x = \frac{3\pi}{4}$.

Verifiquemos ahora nuestros resultados. Reemplazamos por ejemplo $x = \frac{3\pi}{4}$:

$$\csc^2\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \left(-\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{2^2}{(\sqrt{2})^2} = \frac{4}{2} = 2 = 2 \cdot 1 = 2 \cdot \cot^2\left(\frac{3\pi}{4}\right).$$

Por tanto $x = \frac{3\pi}{4}$ es solución de la ecuación. Igualmente se verifica que $x = \frac{\pi}{4}$ es solución de la ecuación.

Ahora vamos a considerar todos los números reales que satisfacen la ecuación. Como la función cotangente es periódica y tiene período π, las soluciones de la ecuación en el conjunto de los números reales tienen la forma:

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z},$$

$$x = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

En la solución de las ecuaciones trigonométricas con frecuencia algunas operaciones algebraicas alteran la ecuación original. Es posible que surjan algunas soluciones de las ecuaciones intermedias que no son soluciones de la ecuación original. Éstas son comunmente llamadas soluciones extrañas.

Ejemplo 9.4

Encuentre la solución de la ecuación trigonométrica

$$2\cos^2 t + \cos t - 1 = 0, \text{ para } 0 \leq t < 2\pi.$$

Solución
Observe que ésta es una ecuación cuadrática en $\cos t$. Entonces

$$\begin{aligned}\cos t &= \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4},\\ \cos t &= \frac{1}{2} \quad \text{ó} \quad \cos t = -1.\end{aligned}$$

$\cos t = \frac{1}{2}$: Los valores de t en el intervalo $0 \leq t < 2\pi$, son $t = \frac{\pi}{3}$ y $t = \frac{5\pi}{3}$

$\cos t = -1$: $t = \pi$.

Fácilmente se verifica que todos los valores obtenidos de t son soluciones de la ecuación. La respuesta es $t = \frac{\pi}{3}, t = \frac{5\pi}{3}$ y $t = \pi$.

Ejemplo 9.5

Resuelva la siguiente ecuación trigonométrica:

$$\cos t + \operatorname{sen} t = 1, 0 \leq t < 2\pi.$$

Solución
Elevamos al cuadrado ambos lados de la igualdad

$$\begin{aligned}(\cos t + \operatorname{sen} t)^2 &= 1,\\ \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t + 2 \operatorname{sen} t \cos t &= 1,\\ 1 + 2 \operatorname{sen} t \cos t &= 1,\\ 2 \operatorname{sen} t \cos t &= 0,\\ \operatorname{sen} t = 0 \quad \text{ó} \quad \cos t &= 0.\end{aligned}$$

Resolvemos estas dos últimas ecuaciones en el intervalo $0 \leq t < 2\pi$.

$$\cos t = 0, \text{ si } t = \frac{\pi}{2} \quad \text{ó} \quad t = \frac{3\pi}{2},$$

$$\operatorname{sen} t = 0, \text{ si } t = 0 \quad \text{ó} \quad t = \pi.$$

Debido a que elevamos al cuadrado, es posible que hayan surgido soluciones extrañas. Debemos verificar si los valores de t obtenidos son en efecto soluciones de la ecuación original.

- $t = 0$: $\cos 0 + \operatorname{sen} 0 = 1 + 0 = 1$. Conclusión: $t = 0$ si es solución de la ecuación.
- $t = \pi$: $\cos \pi + \operatorname{sen} \pi = -1 + 0 \neq 1$. Conclusión: $t = \pi$ no es solución de la ecuación originalmente dada.
- $t = \frac{\pi}{2}$: $\cos \frac{\pi}{2} + \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 0 + 1 = 1$. Conclusión: $t = \frac{\pi}{2}$ si es solución de la ecuación.
- $t = \frac{3\pi}{2}$: $\cos \frac{3\pi}{2} + \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} = 0 + (-1) = -1 \neq 1$. Conclusión: $t = \frac{3\pi}{2}$ no es solución de la ecuación.

Respuesta: las soluciones de la ecuación $\cos t + \operatorname{sen} t = 1$, para $0 \leq t < 2\pi$, son: $t = 0$ y $t = \frac{\pi}{2}$.

Lección 10

Resolución de triángulos I: ley del coseno

En esta lección trataremos el tema de la resolución de triángulos para el caso general, en el cual no necesariamente tenemos un ángulo recto. Los lados y ángulos conocidos en un triángulo dado determinan la posibilidad de resolverlo y la metodología que podrá utilizarse. Iniciaremos el estudio con la ley del coseno y en la próxima lección estudiaremos la ley del seno.

Uno de los resultados conocidos que estaremos utilizando a lo largo de esta lección es el siguiente teorema

Teorema 10.1

La suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo es $180°$, lo cual equivale a π radianes.

Resolver un triángulo significa encontrar la longitud de sus lados y la medida de sus ángulos. Para hacer esto necesariamente necesitamos conocer la longitud de uno de sus lados. Además, como veremos, se requiere conocer otras dos cantidades.

Si se conocen tres datos en un triángulo y uno de los datos es un lado, tenemos las siguientes cuatro posibilidades:

- Se conocen tres lados.
- Se conocen dos lados y el ángulo comprendido entre ellos.
- Se conocen dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.
- Se conocen un lado y dos ángulos.

La ***ley del coseno*** se usa para resolver los triángulos en los dos primeros casos y la ***ley del seno*** en los dos últimos casos.

En la figura 10.1 aparece la notación que usaremos para representar los lados y ángulos del triángulo ΔABC. Denotaremos los ángulos utilizando las letras de los vértices correspondientes. Otra notación usual es usar las correspondientes letras griegas α, β y γ para los ángulos correspondientes a los vértices A, B y C, respectivamente. También se utilizarán estas letras para designar las medidas de los ángulos en grados o en radianes.

Para nombrar los lados y también para designar su longitud, utilizaremos, generalmente, las letras minúsculas correspondientes al vértice opuesto.

Triángulo ΔABC *Triángulo* ΔABC

Figura 10.1

Teorema 10.2 ***Ley del coseno***

En un triángulo ΔABC, con lados a, b, y c y ángulos opuestos A, B y C se tiene que

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A, \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B, \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C. \end{cases} \tag{10.1}$$

El teorema afirma que en cualquier triángulo el cuadrado de la longitud de uno de sus lados es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los otros dos lados menos el doble producto de las longitudes de estos dos lados multiplicado por el coseno del ángulo comprendido entre ellos.

Este teorema también es comúnmente conocido como teorema de Pitágoras generalizado, ya que el teorema de Pitágoras es un caso especial de éste, cuando el ángulo comprendido entre los dos lados es recto ($\cos 90° = 0$).

Ejemplo 10.1

Se conocen los tres lados de un triángulo $a = 2, b = 2.5, c = 4$. Determine sus ángulos.

Solución

Determinamos los ángulos mediante las siguientes expresiones, las cuales se deducen inmediatamente de las ecuaciones (10.1):

$$\begin{aligned}
\cos A &= \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{(2.5)^2+4^2-2^2}{2(2.5)(4)} = \frac{6.25+16-4}{20} = \frac{18.25}{20}, \\
A &\approx 24.15°, \\
\cos B &= \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{2^2+4^2-(2.5)^2}{2(2)(4)} = \frac{4+16-6.25}{16} = \frac{13.75}{16}, \\
B &\approx 30.75°, \\
\cos C &= \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{2^2+(2.5)^2-4^2}{2(2)(2.5)} = \frac{4+6.25-16}{10} = \frac{-5.75}{10}, \\
C &\approx 125.10°.
\end{aligned}$$

Observemos que $\cos C$ es negativo. Esto indica que C es un ángulo obtuso, (mayor de $90°$). La suma de A, B y C es $180°$.

Ejemplo 10.2

Se conocen dos lados de un triángulo $a = 2, b = 2.5$ y el ángulo comprendido entre ellos $C = 60°$. Determine sus ángulos restantes y el lado c.

Solución

Por la ley del coseno $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$:

$$c^2 = 2^2 + (2.5)^2 - 2\cdot(2)\cdot(2.5)\cos 60° = 4 + 6.25 - 10\cdot\frac{1}{2} = 5.24,$$

$$c \approx 2.29.$$

Para hallar los demás ángulos, puede usarse la ley del coseno.

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \approx \frac{(2.5)^2+(2.29)^2-2^2}{2(2.5)(2.29)} \approx \frac{6.25+5.24-4}{11.45} \approx \frac{7.49}{11.45},$$

$$A \approx 49.11°,$$

$$\cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} \approx \frac{2^2+2.29^2-(2.5)^2}{2(2)(2.29)} \approx \frac{4+5.24-6.25}{9.16} \approx \frac{2.99}{9.16},$$

$$B \approx 70.92°.$$

Es conveniente revisar nuestros resultados.

Primer método: la suma de los ángulos obtenidos es $A+B+C \approx 49.11° + 70.92° + 60° \approx 180,03°$. Este es un resultado muy aproximado a $180°$.

Segundo método: podemos confirmar de nuevo, el valor conocido como un dato del problema, $C = 60°$.

$$\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{2^2+(2.5)^2-(2.9)^2}{2(2)(2.5)} = \frac{4+6.25-5.24}{10} \approx \frac{5.01}{10}.$$

El ángulo C es aproximadamente $59.96° \approx 60°$.

Respuesta: c es aproximadamente igual a 2.29 y los ángulos son $C = 60°$, A es aproximadamente igual a $49.11°$ y B es aproximadamente igual a $70.92°$.

Lección 11

Resolución de triángulos II: ley del seno

En esta lección continuaremos el tema de la resolución de triángulos para el caso general, estudiando la ley del seno.

Como vimos en la lección anterior, conocidos tres datos en un triángulo, incluido un lado, tenemos las siguientes cuatro posibilidades:

- Se conocen tres lados.
- Se conocen dos lados y el ángulo comprendido entre ellos.
- Se conocen dos ángulos y un lado.
- Se conocen dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.

La ***ley del seno*** que veremos a continuación se usa en los dos últimos casos.

Teorema 11.1 ***Ley del seno***

Dado un triángulo ΔABC con lados a, b y c y ángulos opuestos A, B y C se tiene que

$$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}. \tag{11.1}$$

Observación 1. El teorema anterior podrá aplicarse cuando son conocidos dos ángulos y un lado. El tercer ángulo queda plenamente determinado pues la suma de los tres ángulos es igual a $180°$ (ó π en el caso en el cual los ángulos sean dados en radianes). Los otros dos lados se calculan fácilmente usando la ecuación (11.1).

Ejemplo 11.1

Resuelva el triángulo ΔABC, conocidos los ángulos $\alpha = 70°$, $\beta = 60°$ y el lado $a = 2$ cms.

Solución

En primer lugar hallamos el ángulo γ, teniendo en cuenta que $\alpha + \beta + \gamma = 180°$:

$$\gamma = 180° - 70° - 60° = 50°.$$

Utilizaremos ahora la ley del seno para calcular las longitudes de los lados b y c

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{sen} 70^\circ}{2} &= \frac{\operatorname{sen} 60^\circ}{b}, \\ b &= 2 \cdot \frac{\operatorname{sen} 60^\circ}{\operatorname{sen} 70^\circ} \approx 1.84, \\ \frac{\operatorname{sen} 70^\circ}{2} &= \frac{\operatorname{sen} 50^\circ}{c}, \\ c &= 2 \cdot \frac{\operatorname{sen} 50^\circ}{\operatorname{sen} 70^\circ} \approx 1.63. \end{aligned}$$

Observación 2. El segundo caso en el cual podemos utilizar la ley del seno para resolver un triángulo es cuando se conocen dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos, el cual será denotado en forma general por D. Es evidente que la ecuación (11.1) puede utilizarse fácilmente, para determinar el seno del ángulo opuesto al segundo lado conocido. Sin embargo en este punto tenemos que ser cuidadosos al resolver la ecuación

$$\operatorname{sen} t = m, \tag{11.2}$$

donde t es una variable desconocida que puede ser cualquiera de los tres ángulos A, B ó C y m es un valor conocido mayor o igual a cero. Si m es mayor que 1, la ecuación (11.2) no tiene solución debido al resultado bien conocido: $-1 \leq \operatorname{sen} t \leq 1$.

Por otra parte, si $0 \leq m \leq 1$ existen dos soluciones posibles para la ecuación (11.2). Llamemos estas soluciones $t = t_1$ y $t = t_2$, donde el ángulo t_1 es un ángulo agudo y t_2 es un ángulo obtuso.

Si la medida del ángulo $t_2 + D$ es mayor o igual que dos ángulos rectos, entonces $t = t_2$ no es una solución aceptable para nuestro triángulo puesto que la suma de los tres ángulos interiores de un triángulo debe sumar 180° (ó π). En este caso existe una única solución $t = t_1$ de la ecuación (11.2), que es una solución aceptable para el triángulo ΔABC.

Si $t_2 + D$ es menor que dos ángulos rectos, existen dos soluciones para el triángulo una de ellas incluye al ángulo t_1 y al ángulo D y la otra incluye al ángulo t_2 y al ángulo D. Todavía tenemos que hallar el tercer ángulo de cada una de estas dos soluciones. Ilustraremos estas ideas en los tres ejemplos siguientes.

Ejemplo 11.2

Determine cuántos triángulos pueden construirse con la información dada. Resuelva los triángulos

1. $a = 4$, $b = 3$, $\beta = 60^\circ$.

   Solución

   Por la ecuación (11.1)

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{sen} \alpha}{4} &= \frac{\operatorname{sen} 60^\circ}{3}, \\ \operatorname{sen} \alpha &= 4 \cdot \frac{\operatorname{sen} 60^\circ}{3} = 4 \cdot \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{3} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3} \approx 1.15. \end{aligned}$$

Luego, no existe ningún valor de α que satisfaga la ecuación $\operatorname{sen}\alpha = \frac{2\cdot\sqrt{3}}{3}$ pues $\operatorname{sen}\alpha$ es mayor que 1. No hay ningún triángulo que se ajuste a los valores dados.

2. $a = 5$, $b = 5$, $\alpha = 30°$.

   Solución

   Por la ecuación (11.1)

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{sen} 30°}{5} &= \frac{\operatorname{sen}\beta}{5}, \\ \operatorname{sen}\beta &= 5 \cdot \frac{\operatorname{sen} 30°}{5} = 5 \cdot \frac{\frac{1}{2}}{5} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

   Las soluciones de la ecuación $\operatorname{sen}\beta = \frac{1}{2}$, están en el primer y segundo cuadrante. Las podemos llamar β_1 y β_2:

$$\beta_1 \quad = \quad 30° \quad \text{y} \quad \beta_2 \quad = \quad 180° - \beta_1 \quad = 150°.$$

   Tomamos el ángulo mayor para verificar si éste es apropiado. Observamos que

$$\alpha + \beta_2 = 30° + 150° = 180°.$$

   Observe que si escogemos $\beta_2 = 150°$ entonces $\alpha + \beta_2 = 180°$ y no queda espacio para el ángulo γ. Por lo anterior, la única solución es $\beta = \beta_1 = 30°$. El tercer ángulo γ satisface

$$\gamma = 180° - \alpha - \beta = 180° - 30° - 30° = 120°.$$

   El tercer lado c satisface la ecuación

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{sen} 30°}{5} &= \frac{\operatorname{sen}\gamma}{c}, \\ c &= 5 \cdot \frac{\operatorname{sen} 120°}{\operatorname{sen} 30°} = 5 \cdot \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = 5\sqrt{3}. \end{aligned}$$

   Luego, hay un solo triángulo que satisface las condiciones dadas:

$$a = 5, b = 5, c = 5\sqrt{3}, \alpha = 30°, \beta = 30°, \gamma = 120°.$$

3. $a = 3$, $b = 4$, $\alpha = 30°$.

   Solución

   Por la ecuación (11.1)

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{sen} 30°}{3} &= \frac{\operatorname{sen}\beta}{4}, \\ \operatorname{sen}\beta &= 4 \cdot \frac{\operatorname{sen} 30°}{3} = 4 \cdot \frac{\frac{1}{2}}{3} = \frac{2}{3} \\ \beta_1 &\approx 41.81° \quad \text{y} \quad \beta_2 = 180° - \beta_1 \approx 138.19°. \end{aligned}$$

Observamos que

$$30^\circ + \beta_2 \quad \approx \quad 30^\circ + 138.19^\circ \quad < \quad 180^\circ.$$

Por lo cual el ángulo β_2 también es solución del problema y las soluciones son $\beta_1 \approx 41.81^\circ$ y $\beta_2 \quad \approx \quad 138.19^\circ$. Para cada uno de estos valores hay un valor para el tercer ángulo γ_1 y γ_2 que satisfacen

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= 180^\circ - 30^\circ - 41.81^\circ &= 108.19^\circ, \\ \gamma_2 &= 180^\circ - 30^\circ - 138.19^\circ &= 11,19^\circ. \end{aligned}$$

El tercer lado satisface las ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{sen} 30^\circ}{3} &= \frac{\operatorname{sen} \gamma_1}{c_1}, \\ c_1 &= 3 \cdot \frac{\operatorname{sen} 108.19^\circ}{\operatorname{sen} 30^\circ} \approx 3 \cdot \frac{0.95}{0.5} \approx 5.7, \\ \frac{\operatorname{sen} 30^\circ}{3} &= \frac{\operatorname{sen} \gamma_2}{c_2}, \\ c_2 &= 3 \cdot \frac{\operatorname{sen} 11,19^\circ}{\operatorname{sen} 30^\circ} \approx 3 \cdot \frac{0.19}{0.5} \approx 1.14. \end{aligned}$$

Luego, hay dos triángulos que satisfacen las condiciones dadas:

$$a = 3, b = 4, c \approx 5.7, \alpha = 30^\circ, \beta \approx 41.81^\circ, \gamma \approx 108.19^\circ,$$

$$a = 3, b = 4, c \approx 1.14, \alpha = 30^\circ, \beta \approx 138.19^\circ, \gamma \approx 11.19^\circ.$$

Lección 12

Línea recta I

En el plano cartesiano una **línea recta** o **recta** es el conjunto de puntos cuyas coordenadas satisfacen una ecuación del tipo

$$\boxed{ax + by + c = 0}$$

donde a, b y c son constantes reales, con $a \neq 0$ ó $b \neq 0$. Esta última ecuación se conoce con el nombre de **forma general** de la ecuación de la recta en el plano.

En el caso de una recta que no es vertical, las coordenadas de los puntos pertenecientes a la recta satisfacen una ecuación del tipo $y = mx + b$, donde m y b son constantes reales.

La constante m se llama **pendiente** de la recta y es la tangente del ángulo de inclinación de la recta (ángulo que forma la recta con el *semieje* x positivo, medido en sentido antihorario, desde el *semieje* x positivo hasta encontrar por primera vez la recta, véase la figura 12.1). La constante b es la coordenada del punto donde la recta intercepta el *eje* y, que corresponde al punto de la recta para el cual x es 0.

La ecuación

$$\boxed{y = mx + b}$$

se conoce con el nombre de ecuación de la recta en la **forma pendiente–intercepto**.

Notemos que en el plano una línea recta está completamente determinada por dos puntos distintos que están sobre ella.

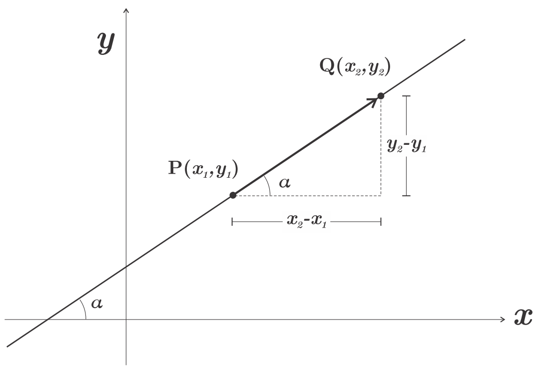


Figura 12.1

Si una recta pasa por los puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$, $x_1 \neq x_2$, podemos demostrar que la pendiente m de dicha recta está dada por

$$\boxed{m = \tan\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},}$$

donde α es el ángulo de inclinación de la recta.

La pendiente es la razón entre el desplazamiento vertical y el desplazamiento horizontal, cuando pasamos de un punto a otro sobre la recta.

$$m = \frac{\text{desplazamiento vertical}}{\text{desplazamiento horizontal}}.$$

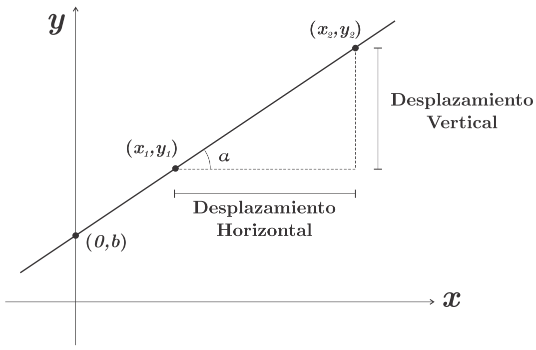


Figura 12.2

Observemos que la pendiente de la recta es independiente del orden en que tomemos los puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ para calcular los desplazamientos verticales y horizontales. Es decir,

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}.$$

Si una recta pasa por los puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$, donde $x_1 \neq x_2$, otra manera de escribir la ecuación de dicha recta es

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1),$$

que es equivalente a $y = mx + b$, con $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, y $b = y_1 - \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x_1$.

Como consecuencia de la observación anterior tenemos que, la fórmula **punto–pendiente** para hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(x_0, y_0)$ y tiene pendiente m esta dada por

$$\boxed{y - y_0 = m(x - x_0).}$$

Ejemplo 12.1

Grafique la recta L cuya ecuación es $y = 3x - 2$.

Solución

La gráfica de dicha recta es el conjunto de puntos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tales que $y = 3x - 2$, o sea, el conjunto de todos los puntos de la forma $(x, 3x - 2)$, donde $x \in \mathbb{R}$. Esta recta tiene pendiente $m = 3$ y corta el eje y en $(0, -2)$.

Como sabemos que la recta pasa por el punto $(0, -2)$, para graficarla necesitamos otro punto que podemos obtener hallando el valor de y para un valor de $x \neq 0$. Si $x = 1$, $y = 3(1) - 2 = 1$ y entonces el punto $(1, 1)$ también está sobre esta recta. A continuación, ubicamos en el plano cartesiano los puntos $(0, -2)$ y $(1, 1)$, y con una regla trazamos la línea recta que pasa por dichos puntos (véase la figura 12.3).

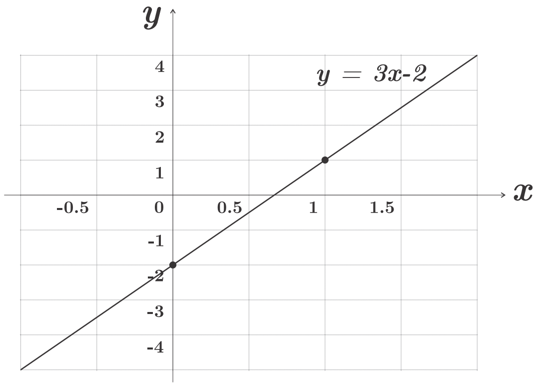


Figura 12.3

Como la pendiente de la recta es 3, si consideramos dos puntos diferentes sobre la gráfica y medimos el desplazamiento vertical entre ellos, éste es el triple del desplazamiento horizontal entre estos puntos.

Ejemplo 12.2

Halle la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(1, -1)$ y $(-3, 2)$.

Solución

Primero calculamos la pendiente m de la recta $y = mx + b$ empleando los puntos $(x_1, y_1) = (1, -1)$ y $(x_2, y_2) = (-3, 2)$:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - (-1)}{-3 - 1} = -\frac{3}{4}.$$

Para obtener b basta con reemplazar cualquiera de los puntos en la ecuación, es decir, reemplazando, por ejemplo, el punto $(x_1, y_1) = (1, -1)$ en la ecuación $y = -\frac{3}{4}x + b$, obtenemos que $-1 = -\frac{3}{4}(1) + b$, $b = -\frac{1}{4}$. Concluimos que la ecuación de la recta que pasa por los dos puntos es $y = -\frac{3}{4}x - \frac{1}{4}$ (véase la figura 12.4).

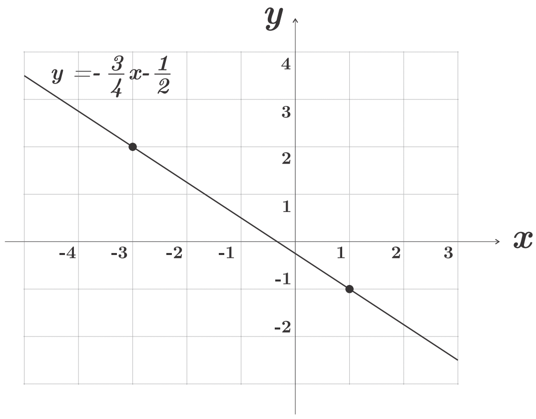


Figura 12.4

Ejemplo 12.3

La ecuación $y = 2$ corresponde a una recta con pendiente $m = 0$ que corta al eje y en el punto $(0, 2)$. Su gráfica es el conjunto de puntos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tales que $y = 2$. Esta recta es una recta horizontal, ya que para cualquier valor de x, $y = 2$ (véase la figura 12.5).

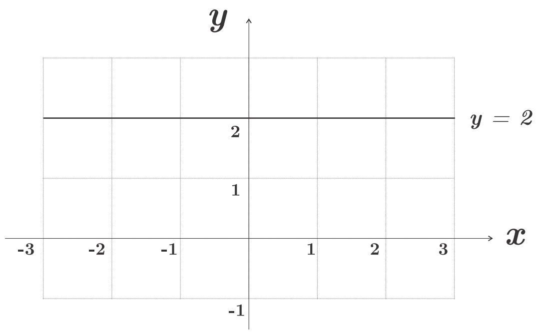


Figura 12.5

Observaciones

1. La pendiente m de una recta puede ser positiva, negativa o cero. En el caso de una recta vertical la pendiente no está definida (véase la figura 12.5).

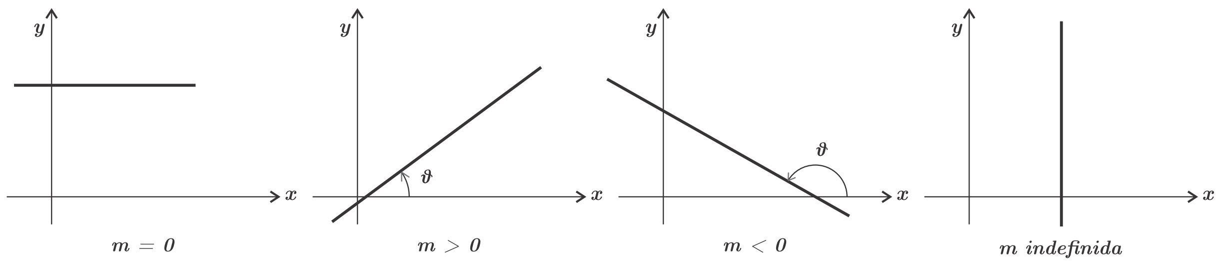


Figura 12.6

2. La pendiente no está definida para rectas verticales, ya que dos puntos cualesquiera sobre una de estas rectas tienen la misma componente en x. La ecuación de una recta vertical es de la forma $x = b$, donde b es una constante.

3. La pendiente de una recta horizontal es siempre igual a 0.

Distancia de un punto a una recta

Dados un punto $P(x_0, y_0)$ y un recta L con ecuación $ax + by + c = 0$ queremos hallar la distancia del punto P a la recta L (véase la figura 12.7-izquierda).

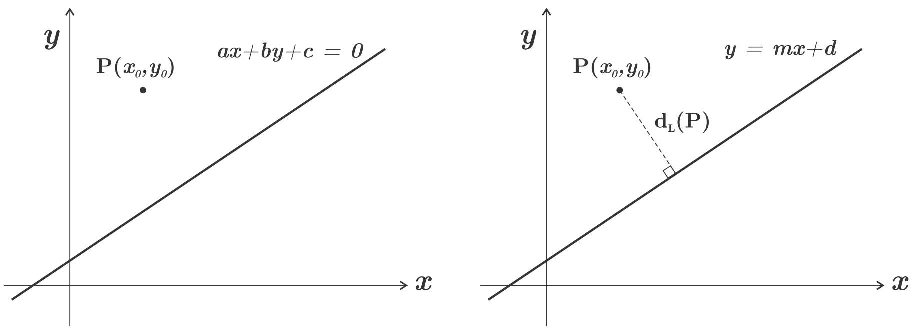


Figura 12.7

Esta distancia es la longitud del segmento de recta que une el punto P y el punto más cercano a él sobre la recta L (véase la figura 12.7-derecha). La distancia de un punto $P(x_0, y_0)$ a la recta L con ecuación $ax + by + c = 0$ está dado por

$$\boxed{d_L(P) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.}$$

Ejemplo 12.4

Halle la distancia del punto $P(2, -5)$ a la recta que pasa por los puntos $(5, -1)$ y $(-3, 6)$.

Solución

Primero calculamos la ecuación de la recta en la forma pendiente–intercepto $y = mx + b$. La pendiente m está dada por

$$m = \frac{-1 - 6}{5 - (-3)} = -\frac{7}{8}\ .$$

Para obtener b reemplazamos el punto $(5, -1)$ en la ecuación $y = -\frac{7}{8}x + b$ y obtenemos que $-1 = -\frac{7}{8}(5) + b$, es decir, $b = \frac{27}{8}$. Concluimos que la ecuación de la recta en la forma pendiente–intercepto es $y = -\frac{7}{8}x + \frac{27}{8}$ y la ecuación de la recta en la forma general es $7x + 8y - 27 = 0$.

Ahora, empleando la fórmula anterior, la distancia del punto $P(2,-5)$ a la recta que pasa por los puntos $(5,-1)$ y $(-3,6)$ es

$$d = \frac{|7(2)+8(-5)-27|}{\sqrt{7^2+8^2}} = \frac{53}{\sqrt{113}}\ .$$

Ejercicios

1. Halle la ecuación de la recta que pasa por el punto $(3,-1)$ y forma un ángulo de 60° con el eje X.
   Rta: $\sqrt{3}x - y = 4 + 3\sqrt{3}$.

2. Hallar las pendientes m y las intersecciones b con el eje Y, de las siguientes rectas:
   (a) $3x - 5y - 10 = 0$.
   (b) $4x + 3y - 18 = 0$.
   (c) $3x + y = 7$.
   (d) $2x - 3y - 5 = 0$.

   Rta: $m = \frac{3}{5}$ y $b = -2$, $m = -\frac{4}{3}$ y $b = 6$, $m = -3$ y $b = 7$, $m = \frac{2}{3}$ y $b = -\frac{5}{3}$.

3. Calcule la ecuación de la recta que cumpla las condiciones dadas.
   (a) Pasa por el punto $P(-2,4)$ y tiene pendiente -1.
   (b) Pasa por el punto $P(-3,2)$ y tiene pendiente $\frac{2}{3}$.
   (c) Pasa por el punto $P(2,4)$ y tiene pendiente 3.
   (d) Pasa por el punto $P(-4,-6)$ y tiene pendiente $\frac{5}{7}$.
   (e) Pasa por los puntos $(-1,-2)$ y $(4,3)$.
   (f) Pasa por los puntos $(-2,-2)$ y $(5,2)$.
   (g) Pasa por los puntos $(5,-1)$ y $(-4,3)$.
   (h) Pasa por los puntos $(2,1)$ y $(-6,5)$.
   (i) Las intersecciones con los ejes X y Y son, respectivamente, 2 y 7.

   Rta: $x+y-2=0$, $2x-3y+12=0$, $3x-y-2=0$, $5x-7y-22=0$, $x-y-1=0$, $4x-7y=6$, $4x+9y-11=0$, $x+2y-4=0$, $7x+2y-14=0$.

Lección 13

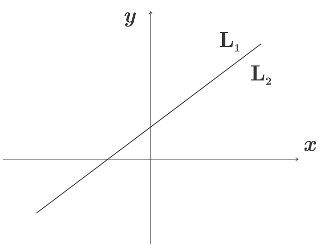
Línea recta II

Cuando graficamos dos rectas L_1 y L_2 en el mismo plano cartesiano, nos encontramos con uno y sólo uno de los siguientes casos:

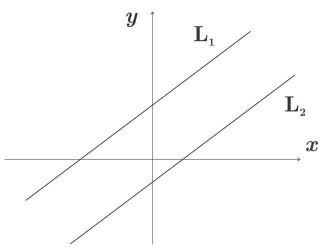
(a) Las rectas L_1 y L_2 tienen todos los puntos en común, es decir, una se monta completamente sobre la otra. Cuando esto sucede decimos que L_1 y L_2 son **coincidentes**.

(b) Las rectas L_1 y L_2 no poseen puntos en común, es decir, nunca se cortan. En este caso decimos que L_1 y L_2 son **paralelas** y escribimos $L_1 \parallel L_2$.

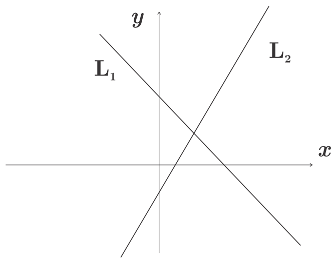
(c) Las rectas L_1 y L_2 tienen un único punto en común P. En dicho caso decimos que L_1 y L_2 se **cortan** o **interceptan** en el punto P.



(a) Rectas coincidentes



(b) Rectas paralelas



(c) Rectas que se interceptan

Figura 13.1

En la situación (c), cuando las rectas al cortarse forman 4 ángulos rectos, decimos que las rectas L_1 y L_2 son **perpendiculares** y escribimos $L_1 \perp L_2$. Gráficamente se acostumbra usar un pequeño cuadrado para indicar la presencia de un ángulo recto (véase la Figura 13.2).

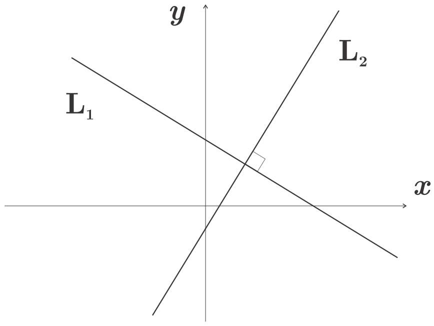


Figura 13.2

Rectas paralelas y perpendiculares

Sean L_1 y L_2 dos rectas distintas no verticales, con pendientes m_1 y m_2, respectivamente. Los conceptos de paralelismo y perpendicularidad entre estas dos rectas se pueden estudiar muy fácilmente haciendo uso de sus pendientes. Se puede demostrar que L_1 y L_2 son paralelas si sus pendientes son iguales, o que son perpendiculares si el producto de sus pendientes es igual a -1.

$$L_1 \parallel L_2 \quad \text{si y sólo si} \quad m_1 = m_2.$$

$$L_1 \perp L_2 \quad \text{si y sólo si} \quad m_1 \cdot m_2 = -1.$$

En el anterior resultado excluimos a las rectas verticales, ya que éstas no poseen pendiente. Con respecto a este tipo de rectas podemos decir que:

- Dos rectas verticales distintas son siempre paralelas.
- Una recta vertical es siempre perpendicular a cualquier recta horizontal.

Ejemplo 13.1

Use la noción de pendiente de una recta para determinar si los puntos del plano $A(-3,-4)$, $B(-1,-1)$ y $C(3,5)$ son colineales o no, es decir, si están o no sobre la misma recta.

Solución

Para descubrir la manera más fácil de resolver este problema, grafiquemos primero estos puntos en el plano cartesiano.

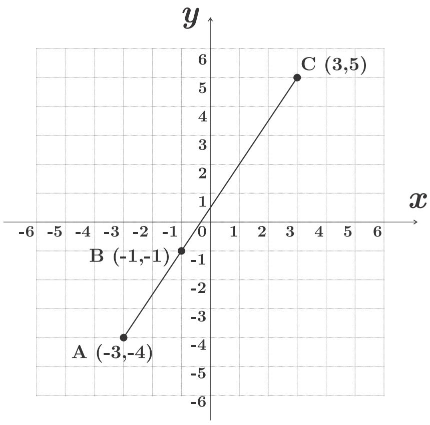


Figura 13.3

Sea L_1 la recta que pasa por los puntos A y B con pendiente m_1, y sea L_2 la recta que pasa por los puntos B y C con pendiente m_2. Para que estos tres puntos sean colineales, las rectas L_1 y L_2 deben ser coincidentes, es decir, deben tener la misma ecuación. Como ambas rectas tienen un punto en común (el punto B), para saber si estas rectas tienen la misma ecuación, basta con averiguar si ellas tienen igual pendiente. Veamos:

$$m_1 = \frac{-1-(-4)}{-1-(-3)} = \frac{-1+4}{-1+3} = \frac{3}{2},$$

y

$$m_2 = \frac{5-(-1)}{3-(-1)} = \frac{5+1}{3+1} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}.$$

Luego $m_1 = m_2$ y por lo tanto L_1 y L_2 son coincidentes, con lo cual podemos concluir que los puntos A, B y C son colineales.

Ejemplo 13.2

Halle la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(3,2)$ y es perpendicular a la recta que pasa por los puntos $A(1,1)$ y $B(5,-1)$.

Solución

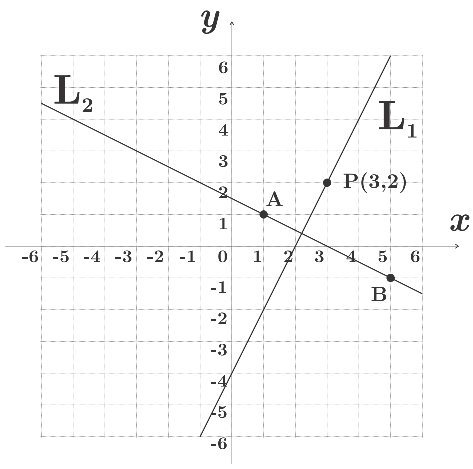


Figura 13.4

Sean L_1 la recta que queremos hallar y L_2 la recta que pasa por los puntos A y B. Denotemos por m_1 y b_1 la pendiente y el intercepto con el eje y de la recta L_1, respectivamente; es decir, la ecuación de L_1 es $y = m_1\, x + b_1$. Así mismo denotemos por m_2 la pendiente de la recta L_2. Empleando los puntos $(x_1, y_1) = (1,1)$ y $(x_2, y_2) = (5,-1)$ podemos calcular m_2, obteniendo que

$$m_2 = \frac{-1-1}{5-1} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}.$$

Sabemos que $L_1 \perp L_2$ si y sólo si $m_1 \cdot m_2 = -1$, esto es

$$m_1 = -\frac{1}{m_2} = -\frac{1}{-\frac{1}{2}} = 2.$$

Así la ecuación de L_1 es $y = 2\,x + b_1$. El valor del intercepto b_1 se obtiene al reemplazar el punto $P(3,2)$ en la ecuación de la recta, es decir, $2 = 2\,(3) + b_1$. Por lo tanto, la ecuación de la recta L_1 es $y = 2\,x - 4$.

Ejemplo 13.3

Demuestre que los puntos del plano $A(-3, 2)$, $B(-1, 5)$ y $C(5, 1)$ corresponden a los vértices de un triángulo rectángulo.

Solución

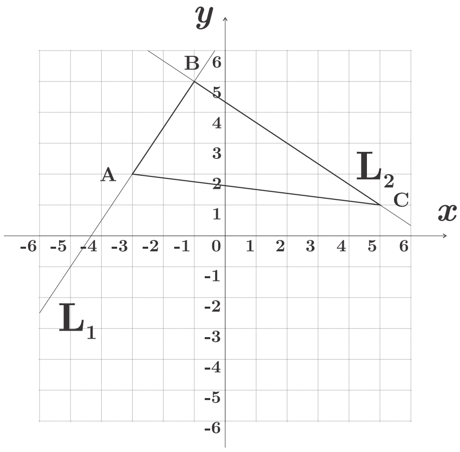


Figura 13.5

La Figura 13.5 sugiere que el ángulo recto parece estar en el vértice B. Sea L_1 la recta que pasa por los puntos A y B, y sea L_2 la recta que pasa por los puntos B y C. Para probar que el triángulo ABC es rectángulo en B, basta demostrar que L_1 es perpendicular a L_2. Para tal fin, calculemos las pendientes m_1 y m_2 de las rectas L_1 y L_2, respectivamente:

$$m_1 = \frac{5-2}{-1-(-3)} = \frac{3}{-1+3} = \frac{3}{2},$$

y

$$m_2 = \frac{1-5}{5-(-1)} = \frac{-4}{5+1} = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3}.$$

Como $m_1 \cdot m_2 = \left(\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{2}{3}\right) = -1$, entonces $L_1 \perp L_2$, y así probamos que el triángulo ABC es rectángulo en el vértice B.

Lección 14

Circunferencias

Definición

Llamamos **circunferencia** al conjunto de los puntos del plano tales que su distancia a un punto fijo, llamado centro, es una constante positiva fija $r > 0$. Dicha constante positiva r recibe el nombre de **radio** de la circunferencia.

Construcción de la circunferencia

Podemos construir una circunferencia como se muestra en la figura 14.1.

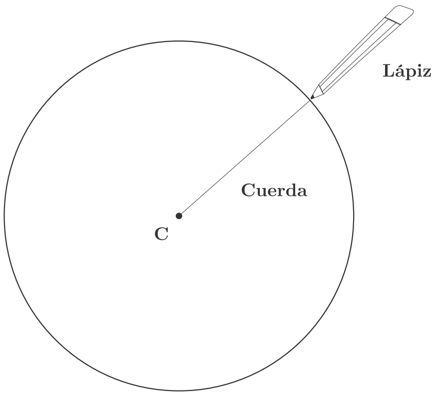


Figura 14.1

Se elige una cuerda de longitud $r > 0$. Se fija un extremo de la cuerda en el punto C. La curva que se describe al mover la punta del lápiz manteniendo tensionada la cuerda es una circunferencia con centro ubicado en el punto C y con radio r.

Ecuación de una circunferencia

Consideremos una circunferencia con centro en el punto $C = (h, k)$ y radio $r > 0$, y supongamos que $P = (x, y)$ es un punto de la circunferencia.
Puesto que P es un punto de la circunferencia su distancia a C debe ser igual a r. Usando

la fórmula de la distancia se obtiene

$$\begin{aligned} d(P,C) &= r, \\ \sqrt{(x-c)^2+(y-k)^2} &= r, \\ (x-c)^2+(y-k)^2 &= r^2. \end{aligned} \tag{14.1}$$

Observe que si el centro de la circunferencia está ubicado en el origen del sistema de coordenadas cartesianas, esto es, si $C = (h, k) = (0, 0)$, la ecuación anterior se reduce a la forma más simple

$$x^2 + y^2 = r^2. \tag{14.2}$$

Gráfica de la circunferencia con centro en $(0, 0)$ y radio $r > 0$

En este caso el centro de la circunferencia es el origen del sistema de coordenadas y se observan las siguientes características.

Simetrías

Observe que en la ecuación de la circunferencia

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

al reemplazar x por $-x$ o y por $-y$, obtenemos la misma ecuación, ya que $(-x)^2 = x^2$ y $(-y)^2 = y^2$. Esto significa que la gráfica de la circunferencia con centro en $(0, 0)$ es simétrica respecto al eje y y al eje x.

Interceptos con los ejes

Si hacemos $x = 0$ en la ecuación de la circunferencia se obtiene que

$$y^2 = r^2.$$

Esta ecuación tiene dos soluciones: $y = r$ y $y = -r$, lo cual significa que la gráfica de la circunferencia con centro en $(0, 0)$ intercepta el eje y en los puntos $A_1 = (0, r)$ y $A_2 = (0, -r)$. Observe que el centro C resulta ser el punto medio entre estos dos puntos.

Por otro lado, si hacemos $y = 0$ en la ecuación de la circunferencia, obtenemos

$$x^2 = r^2.$$

Dicha ecuación tiene dos soluciones: $x = r$ y $x = -r$. De esta manera concluimos que la gráfica de la circunferencia intercepta al eje x en los puntos $B_1 = (-r, 0)$ y $B_2 = (r, 0)$.

A cada segmento de recta que une dos puntos de la circunferencia y pasa por el centro se le denomina diámetro, en particular el segmento $\overline{A_1A_2}$ es un diámetro de la circunferencia.

La figura 14.2 muestra la gráfica de la circunferencia con centro en $C = (0, 0)$ y radio r.

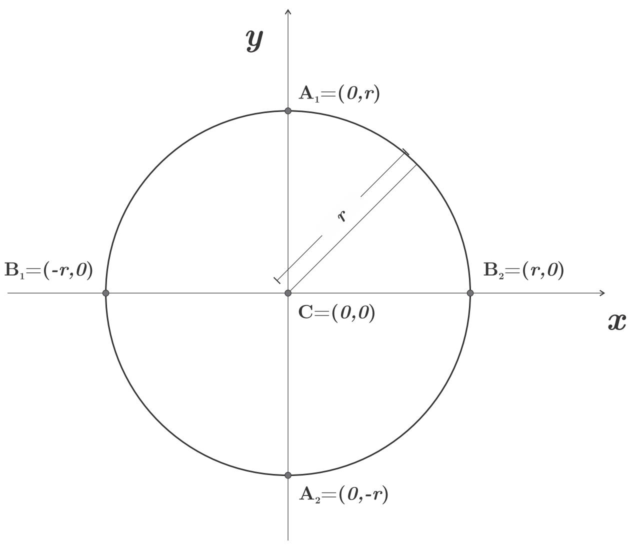


Figura 14.2

Gráfica de la circunferencia con centro en $C = (h, k)$ y radio r

Consideremos ahora una circunferencia de radio r, cuyo centro está ubicado en cualquier punto del plano y supongamos que las coordenadas de dicho punto son (h, k). Como se dedujo anteriormente, la ecuación de esta circunferencia es

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2.$$

En este caso la forma de la circunferencia es igual a la del caso anterior y se puede verificar fácilmente, usando la ecuación anterior, que los puntos notables C, A_1, A_2, B_1 y B_2 de la figura 5.3 tienen las siguientes coordenadas:

- $C = (h, k)$.
- $A_1 = (h, k + r)$ y $A_2 = (h, k - r)$.
- $B_1 = (h - r, k)$ y $B_2 = (h + r, k)$.

La gráfica de esta circunferencia es presentada en la figura 14.3.

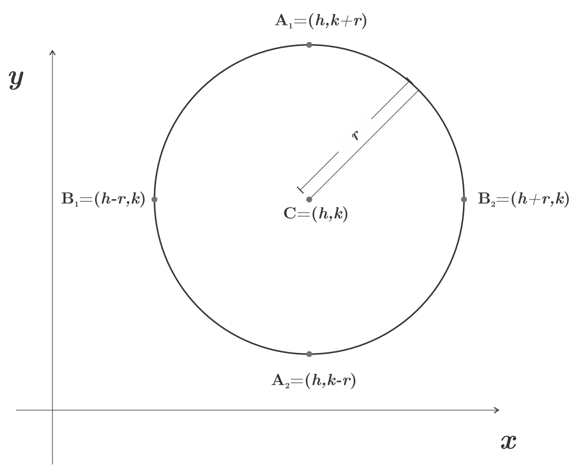


Figura 14.3

Ejemplo 14.1

Encuentre la ecuación de la circunferencia que que tiene como extremos de uno de sus diámetros a los puntos $A_1 = (0, 5)$ y $A_2 = (0, -5)$.

Solución

Observamos que el centro de la circunferencia es el punto medio entre los puntos A_1 y A_2, esto es

$$C = (\frac{1}{2}(5 + (-5)), \frac{1}{2}(0 + 0)) = (0, 0).$$

Además el radio de la circunferencia es $r = 5$. Por lo tanto la ecuación de la circunferencia es

$$x^2 + y^2 = (5)^2,$$
$$x^2 + y^2 = 25.$$

Ejemplo 14.2

Halle los elementos y trace la gráfica de la circunferencia cuya ecuación está dada por

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0. \tag{14.3}$$

Solución

Primero reescribimos la ecuación (14.3) de una manera apropiada y para ello debemos completar los cuadrados perfectos como sigue:

$$\begin{aligned}
(x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 4y + 4) - 20 - 1 - 4 &= 0,\\
(x-1)^2 + (y+2)^2 - 25 &= 0,\\
(x-1)^2 + (y+2)^2 &= 25,\\
(x-1)^2 + (y-(-2))^2 &= (5)^2.
\end{aligned}$$

A partir de la ecuación anterior concluimos que tenemos una circunferencia con centro en $C = (1, -2)$ y radio $r = 5$. Los puntos notables en la circunferencia se ubican en las siguientes coordenadas:

- $A_1 = (1, -2+5) = (1, 3)$ y $A_2 = (1, -2-5) = (1, -7)$.
- $B_1 = (1-5, -2) = (-4, -2)$ y $B_2 = (1+5, -2) = (6, -2)$.

La gráfica de la circunferencia se presenta en la figura 14.4.

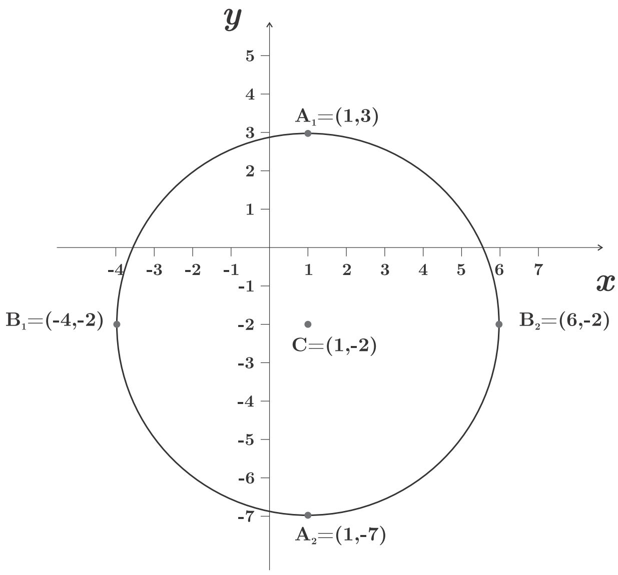


Figura 14.4

Lección 15

Parábolas

Definición

Llamamos **parábola** al conjunto de puntos del plano tales que su distancia a una recta fija, llamada **directriz**, es igual a su distancia a un punto dado, exterior a la directriz, llamado **foco**.

En la figura 6.1 se ilustra la condición que debe cumplir cada punto de la parábola: la distancia del punto a la directriz es igual a la distancia del punto al foco.

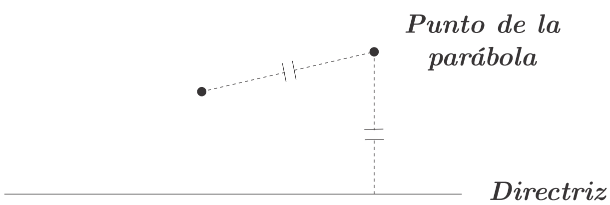


Figura 15.1

La recta que pasa por el foco y es perpendicular a la directriz R se denomina **eje focal** de la parábola. El punto en el cual el eje focal intersepta a la parábola se llama **vértice** de la parábola. Observemos que, por la definición de parábola, el vértice es el punto medio del segmento sobre el eje focal que une el foco con la directriz.

La recta que pasa por el foco y es paralela a la directriz R intersepta a la parábola en dos puntos. Al segmento que une estos dos puntos se le llama **lado recto**. La terminología anterior se ilustra en la figura 6.2.

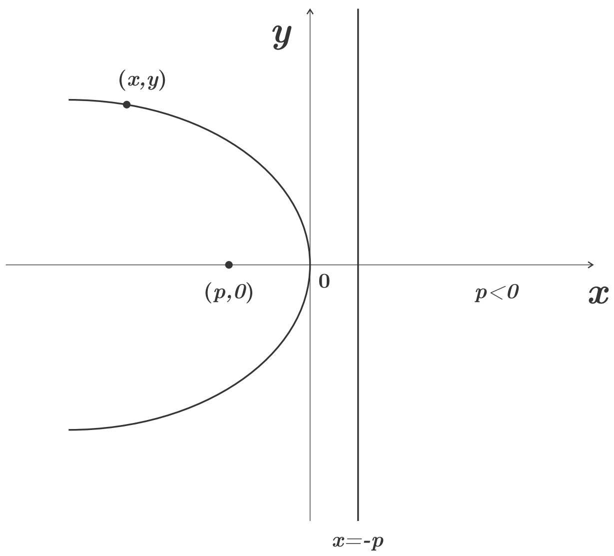


Figura 15.2

Ecuación de la Parábola

Ahora nos planteamos el problema de escribir una ecuación que caracterice los puntos de una parábola dada. Para tal efecto consideramos el sistema de coordenadas cartesianas xy en el plano. Por simplicidad, nos limitaremos al caso en que el vértice de la parábola es el origen $(0,0)$ y su eje focal es el eje x o el eje y:

a) Si el eje focal es el eje y, el foco está ubicado en un punto de la forma $(0,p)$ con $p>0$ o $p<0$.

b) Si el eje focal es el eje x, el foco está ubicado en un punto de la forma $(p,0)$ con $p>0$ o $p<0$.

Comencemos con el caso a). Como veremos, la situación es la descrita en las figuras 6.3 y 6.4.

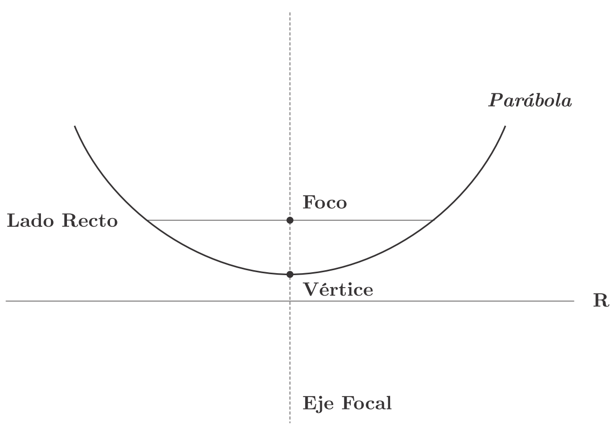


Figura 15.3

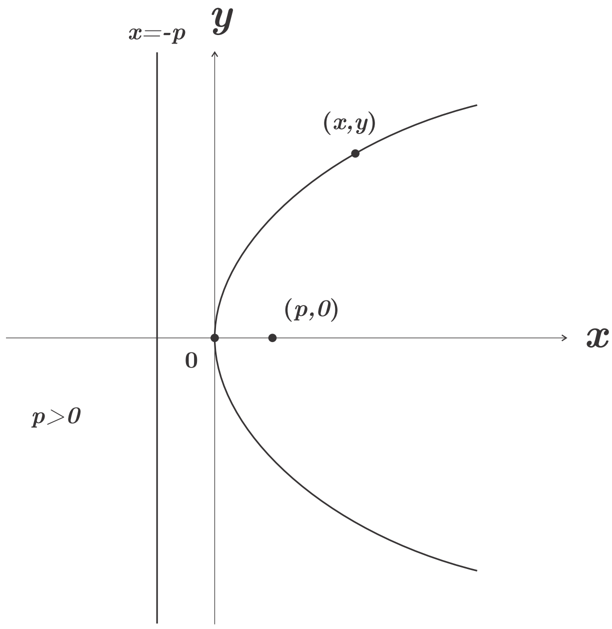


Figura 15.4

En este caso la ecuación de la directriz está dada por la $y = -p$ (pues el vértice $(0, 0)$ equidista del foco y de la directriz). Si tomamos un punto $P = (x, y)$ en la parábola, por la definición de parábola la distancia entre (x, y) y $(0, p)$ es igual a la distancia entre (x, y) y la recta $y = -p$. Además, notemos que la distancia de (x, y) a la recta $y = -p$ es igual a la distancia entre (x, y) y $(x, -p)$. Así:

$$\begin{aligned}
\sqrt{(x-0)^2 + (y-p)^2} &= \sqrt{(x-x)^2 + (y-(-p))^2}, \\
\sqrt{x^2 + (y-p)^2} &= \sqrt{(y+p)^2}, \\
x^2 + (y-p)^2 &= (y+p)^2, \\
x^2 + y^2 - 2py + p^2 &= y^2 + 2py + p^2, \\
x^2 &= 4py,
\end{aligned}$$

o equivalentemente,

$$y = \frac{1}{4p}x^2. \tag{15.1}$$

Observemos que al reemplazar x por $-x$ en la ecuación (15.1), ésta no cambia. Así (x, y) es un punto de la parábola si y sólo si $(-x, y)$ es un punto de la parábola. Esto es, la parábola es simétrica con respecto al eje y. Además, si $p > 0$, entonces de la ecuación (15.1) vemos que $y \geq 0$. Notemos que cuando x toma valores grandes y positivos, o grandes y negativos, y toma valores grandes y positivos. En este caso la parábola se "abre" hacia arriba (véase la figura 6.3).

Si $p < 0$, entonces de la ecuación (15.1) vemos que $y \leq 0$. Notemos que ahora cuando x toma valores grandes y positivos, o grandes y negativos, y toma valores grandes y negativos. En este caso la parábola se "abre" hacia abajo (véase la figura 6.4).

Ahora hallemos los extremos del lado recto. Esto es, hallemos los puntos en los cuales la recta $y = p$ corta a la parábola. Reemplazando y por p en (15.1):

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4p}x^2 &= p, \\
x^2 &= 4p^2, \\
x^2 - 4p^2 &= 0, \\
(x-2p)(x+2p) &= 0, \\
x = 2p \text{ o } x &= -2p,
\end{aligned}$$

Así, los extremos del lado recto son $(-2p, p)$ y $(2p, p)$. La longitud del lado recto es la distancia entre estos dos puntos:

$$\sqrt{(p-p)^2 + (2p-(-2p))^2} = \sqrt{(4p)^2} = 4\,|p|\,.$$

Notemos que a mayor $|p|$, mayor es la longitud del lado recto y en consecuencia la parábola es más "abierta". Resumamos toda la información anterior:

La ecuación de la parábola que tiene vértice en $(0,0)$ *y foco en* $(0,p)$ *está dada por*

$$y = \frac{1}{4p}x^2,$$

y la ecuación de la directriz está dada por $y = -p$.

- *Si* $p > 0$ *la parábola se "abre" hacia arriba.*
- *Si* $p < 0$ *la parábola se "abre" hacia abajo.*

Consideremos ahora el caso b). Como veremos la situación es la descrita en las figuras 6.5 y 6.6.

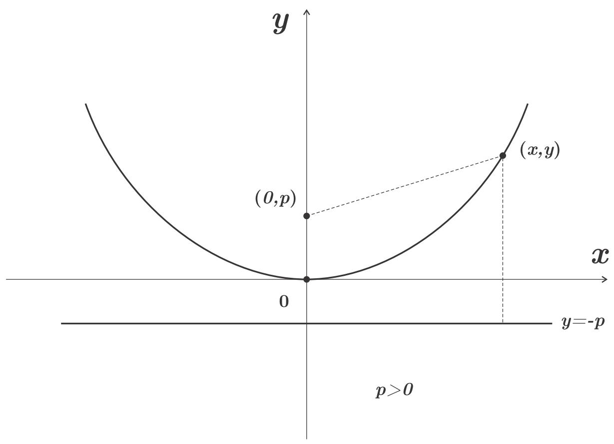


Figura 15.5

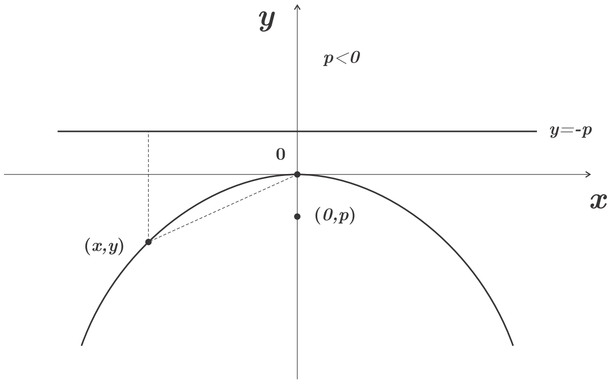


Figura 15.6

En este caso la ecuación de la directriz está dada por $x = -p$. Si tomamos un punto $P = (x, y)$ en la parábola, por la definición de parábola la distancia entre (x, y) y $(p, 0)$ es igual a la distancia entre (x, y) y la recta $x = -p$. Además, notemos que la distancia de (x, y) a la recta $x = -p$ es igual a la distancia entre (x, y) y $(-p, y)$. Procediendo como lo hicimos en el caso a), para llegar a (15.1), obtenemos la ecuación

$$x = \frac{1}{4p}y^2. \tag{15.2}$$

Ahora observemos que al reemplazar y por $-y$ en la ecuación (15.2), ésta no cambia. Así (x, y) es un punto de la parábola si y sólo si $(x, -y)$ es un punto de la parábola. Esto es, la parábola es simétrica rcon especto al eje x. Además, si $p > 0$ entonces de la ecuación (15.2) vemos que $x \geq 0$. Notemos que ahora cuando y toma valores grandes y positivos, o grandes y negativos, x toma valores grandes y positivos. En este caso la parábola se "abre" a la derecha (véase la figura 6.5).

Si $p < 0$, entonces de la ecuación (15.2) vemos que $x \leq 0$. Ahora, notemos que cuando y toma valores grandes y positivos, o grandes y negativos, x toma valores grandes y negativos. En este caso la parábola se "abre" a la izquierda (véase la figura 6.6).

Procediendo como lo hicimos antes en el caso a), obtenemos que el lado recto tiene extremos en $(p, -2p)$ y $(p, 2p)$ y que su longitud es $4\,|p|$. Nuevamente a mayor $|p|$, más abierta es la parábola.

Resumamos toda la información anterior del caso b):

La ecuación de la parábola que tiene vértice en $(0, 0)$ *y foco en* $(p, 0)$ *está dada por*

$$x = \frac{1}{4p}y^2,$$

y la ecuación de la recta directriz está dada por $x = -p$.

- *Si* $p > 0$ *la parábola se "abre" a la derecha.*
- *Si* $p < 0$ *la parábola se "abre" a la izquierda.*

Ejemplo 15.1

Halle una ecuación para la parábola cuyo vértice está en el origen, cuyo eje focal es el eje y, y que contiene al punto $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$. Trace la gráfica de dicha parábola.

Solución

Como el eje focal es el eje y, el foco de la parábola es un punto de la forma $(0, p)$. Sabemos además que el vértice está en el origen. En consecuencia una ecuación para la parábola es de la forma

$$y = \frac{1}{4p}x^2. \tag{15.3}$$

Para determinar el valor de p usamos el hecho de que la parábola contiene al punto $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$. Al reemplazar y por $-1/2$ y x por $1/2$ en (15.3) obtenemos:

$$\frac{-1}{2} = \frac{1}{4p}\left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

De esta igualdad tenemos que $p = -1/8$. Al reemplazar en (15.3), concluimos que la ecuación para la parábola es $y = -2x^2$.

Con el fin de trazar la gráfica, notemos que $p < 0$, de esta manera la parábola se abre hacia abajo. La directriz de la parábola es la recta horizontal $y = 1/8$. El lado recto de la parábola tiene extremos en $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{8})$ y $(\frac{1}{4}, \frac{1}{8})$. En la figura 7.1 representamos la gráfica de la parábola con su lado recto y su foco.

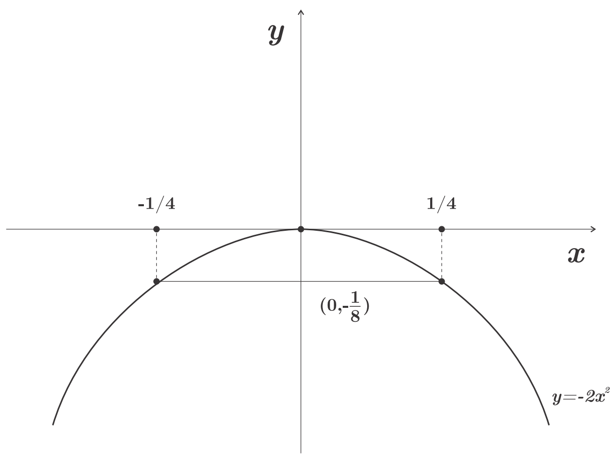


Figura 15.7

Ejemplo 15.2

Encuentre una ecuación para la parábola que tiene vértice en el origen, su eje focal es el eje x y corta a la recta $x = 1$ en los puntos $(1, \frac{1}{3})$ y $(1, -\frac{1}{3})$. A continuación esboce la gráfica de la parábola.

Solución

En primer lugar observemos que la ecuación de la parábola es de la forma

$$x = \frac{1}{4p}y^2, \tag{15.4}$$

pues el eje focal es el eje x. Para hallar p usemos la información del enunciado: al reemplazar $x = 1$ y $y = \pm\frac{1}{3}$ en la ecuación (15.4), obtenemos que $p = \frac{1}{36}$. Usando nuevamente la ecuación (15.4), concluimos que la ecuación de la parábola es $x = 9y^2$. La parábola se abre a la derecha. En la figura 7.2 esbozamos la gráfica.

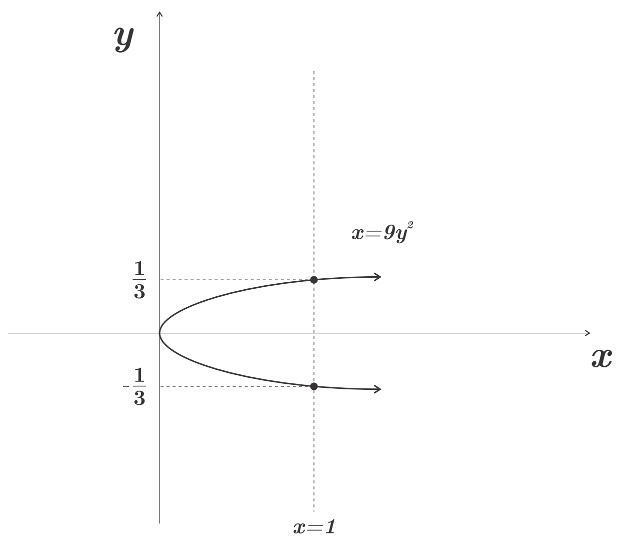


Figura 15.8

Lección 16

Elipses I

La elipse

Llamamos elipse al conjunto de puntos del plano tales que la suma de las distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es igual a una constante positiva $2a$, que es mayor a la distancia entre los focos.

Construcción de la elipse

Podemos construir una elipse como se muestra en la figura 16.1.

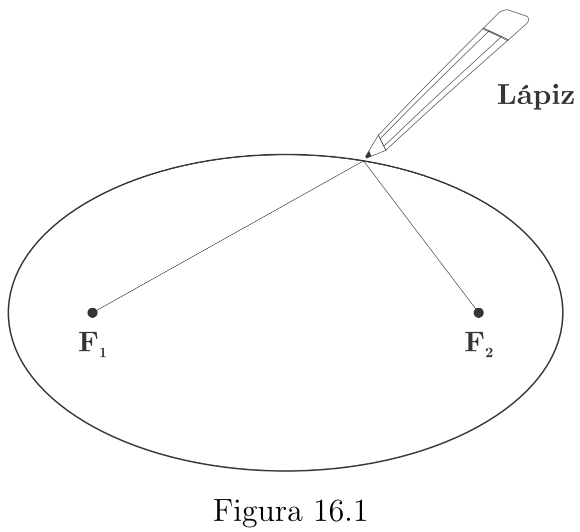


Figura 16.1

Se fijan dos puntos, los cuales llamaremos F_1 y F_2 y se elige una cuerda de longitud $2a$, con $2a > d(F_1, F_2)$. Se fijan los extremos de la cuerda en F_1 y F_2. La curva que se describe al mover la punta del lápiz manteniendo tensionada la cuerda es una elipse con focos ubicados en F_1 y F_2.

Ecuación de una elipse

Consideremos una elipse cuyos focos sean los puntos $F_1 = (-c, 0)$ y $F_2 = (c, 0)$, donde $c > 0$, y supongamos que $P = (x, y)$ es un punto de la elipse.
Denotemos por $2a$, con $a > 0$, a la suma de las distancias de P a F_1 y de P a F_2. Como P es un punto sobre la elipse se debe cumplir que

$$\begin{aligned}
d(P, F_1) + d(P, F_2) &= 2a \\
\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} &= 2a \\
\sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\
(\sqrt{(x+c)^2 + y^2})^2 &= (2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2})^2 \\
(x+c)^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \\
x^2 + 2xc + c^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2 \\
4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= 4a^2 - 4xc \\
a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= a^2 - xc \\
(a\sqrt{(x-c)^2 + y^2})^2 &= (a^2 - xc)^2 \\
a^2((x-c)^2 + y^2) &= a^4 - 2a^2xc + x^2c^2 \\
a^2(x^2 - 2xc + c^2 + y^2) &= a^4 - 2a^2xc + x^2c^2 \\
a^2x^2 - 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2 &= a^4 - 2a^2xc + x^2c^2 \\
(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 &= a^2(a^2 - c^2).
\end{aligned}$$

Observemos que como $2a > d(F_1, F_2)$ y como $d(F_1, F_2) = 2c$, entonces $a > c$ y por lo tanto $a^2 > c^2$. Concluimos de esta manera que $a^2 - c^2 > 0$ y si definimos $b^2 = a^2 - c^2$, con $b > 0$, al reemplazar en la ecuación obtenida anteriormente se obtiene

$$\begin{aligned}
b^2x^2 + a^2y^2 &= a^2b^2 \\
\frac{b^2x^2}{a^2b^2} + \frac{a^2y^2}{a^2b^2} &= 1 \\
\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1.
\end{aligned}$$

La última expresión es la ecuación de la elipse con focos en $F_1 = (-c, 0)$ y $F_2 = (c, 0)$, con constante en la definición igual a $2a$.

Elementos de una elipse

Observemos los elementos resaltados en la figura 16.2.

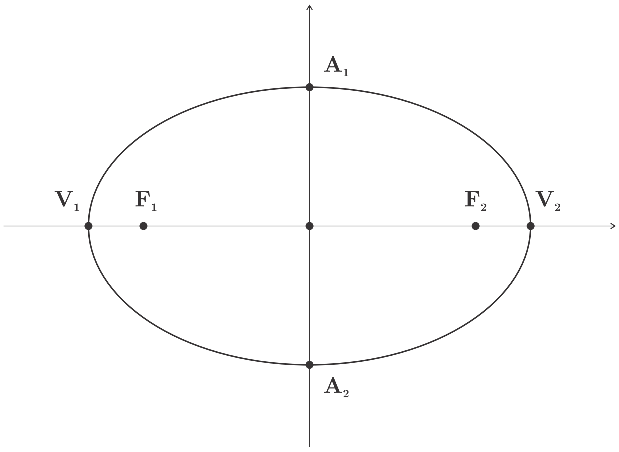


Figura 16.2

- Al punto C, punto medio entre los focos F_1 y F_2, lo denominamos centro de la elipse.
- A la recta L, que pasa por los focos F_1 y F_2, se le llama eje focal.
- Los puntos de intersección de la elipse con el eje focal L, denotados por V_1 y V_2 se llaman vértices de la elipse.
- Al segmento $\overline{V_1V_2}$ se le denomina eje mayor de la elipse.
- A la recta K que pasa por el centro C y es perpendicular al eje focal L se le llama eje normal de la elipse.
- Al segmento $\overline{A_1A_2}$, donde A_1 y A_2 son los puntos de intersección de la elipse con el eje normal K, se le denomina eje menor de la elipse.

Ejemplo 16.1

Encuentre la ecuación de la elipse con vértices en $V_1 = (0, 5)$ y $V_2 = (0, -5)$, y focos en los puntos $F_1 = (0, 4)$ y $F_2 = (0, -4)$.

Solución

Observamos que en este caso la elipse es vertical, pues sus focos se encuentran ubicados sobre el eje y y la ecuación para la elipse tiene la forma

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1.$$

A partir de la información sobre los focos tenemos que $a = 5$, $c = 4$ y por lo tanto $b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 16 = 9$ y concluimos que la ecuación de la elipse es

$$\frac{y^2}{25} + \frac{x^2}{9} = 1.$$

Lección 17

Elipses II

Gráfica de la elipse con focos en $(-c, 0)$ y $(c, 0)$.

En este caso el centro de la elipse está ubicado en el origen $C = (0, 0)$. Además, como los focos de la elipse están sobre el eje x, decimos que dicha elipse es horizontal.

Simetrías

Observe que en la ecuación de la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

al reemplazar x por $-x$ o y por $-y$, obtenemos la misma ecuación, debido a que $(-x)^2 = x^2$ y $(-y)^2 = y^2$. Esto significa que la gráfica de la elipse es simétrica respecto al eje y y al eje x.

Interceptos con los ejes

Si hacemos $x = 0$ en la ecuación de la elipse, obtenemos que

$$y^2 = b^2.$$

Esta ecuación tiene dos soluciones: $y = b$ y $y = -b$. Es decir, la gráfica de la elipse intercepta el eje y en los puntos $A_1 = (0, b)$ y $A_2 = (0, -b)$. Estos dos puntos son los extremos del eje menor de la elipse y por lo tanto la longitud del eje menor de la elipse es $2b$.

Si hacemos $y = 0$ en la ecuación de la elipse, se obtiene que

$$x^2 = a^2.$$

Dicha ecuación tiene dos soluciones: $x = a$ y $x = -a$. De esta manera concluimos que la gráfica de la elipse intercepta al eje x en los puntos $V_1 = (-a, 0)$ y $V_2 = (a, 0)$. Estos dos puntos son los vértices de la elipse y entonces tenemos que la longitud del eje mayor de la elipse es igual a $2a$.

Ejes de la elipse

El eje focal pasa por los puntos F_1 y F_2 y por lo tanto coincide con el eje x.
El eje normal pasa por el punto $C = (0,0)$ y es perpendicular al eje focal, lo cual quiere decir que es el eje y.

La figura 17.1 muestra la gáfica de la elipse para este caso.

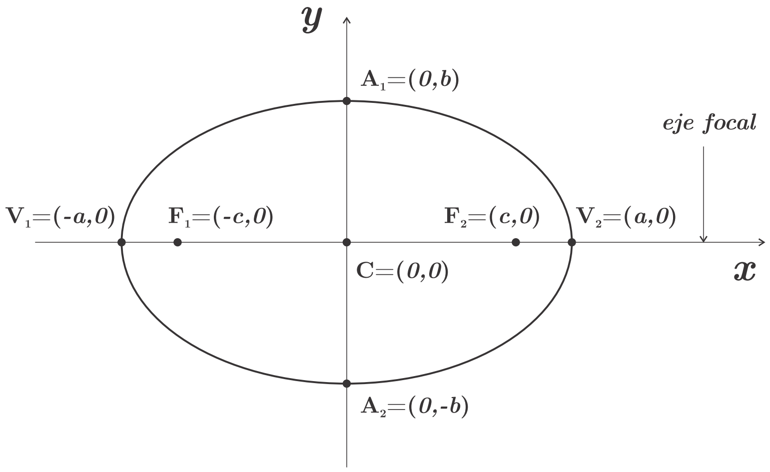


Figura 17.1

Elipse con focos en $(0, c)$ y $(0, -c)$.

Ahora vamos a considerar una elipse con focos ubicados sobre el eje y, $F_1 = (0, c)$ y $F_2 = (0, -c)$, tal que la constante positiva de la definición sea igual a $2a$. Podemos realizar un razonamiento similar al presentado anteriormente y deducir que la ecuación para dicha elipse es

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1,$$

donde $b^2 = a^2 - c^2 > 0$.
En este caso diremos que la elipse es vertical y se puede ver, como en el caso anterior, que la gráfica tiene las siguientes características:

- Es simétrica respecto al eje x y al eje y.
- Los interceptos con el eje y son los puntos $V_1 = (0, a)$ y $V_2 = (0, -a)$, los cuales son los vértices de la elipse.
- Los interceptos con el eje x son los puntos $A_1 = (-b, 0)$ y $A_2 = (b, 0)$. Estos son los extremos del eje menor.
- El eje focal de la elipse es el eje y.
- El eje normal de la elipse es el eje x.

En este caso la elipse es vertical y su gráfica es presentada en la figura 17.2.

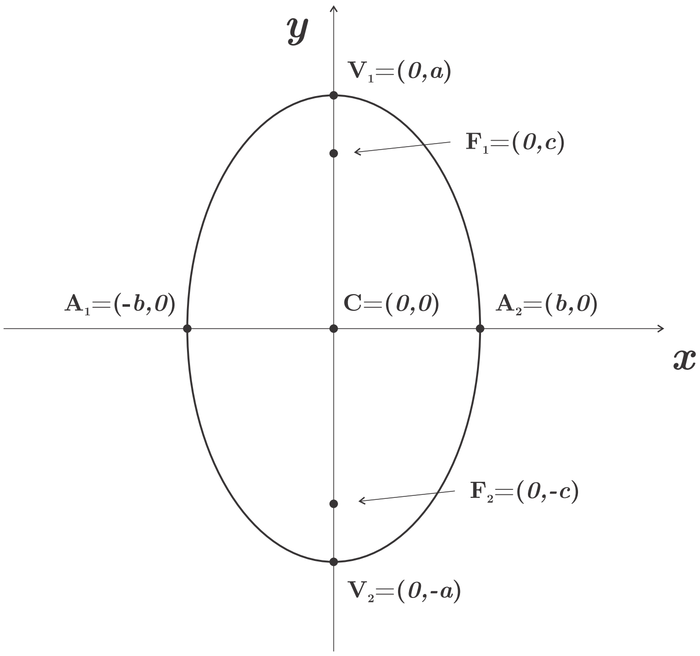


Figura 17.2

Ejemplo 17.1

Halle los elementos y trace la gráfica de la elipse cuya ecuación está dada por

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Solución

Notemos que la elipse es una elipse horizontal con $a^2 = 36$, o equivalentemente $a = 6$, y $b^2 = 9$, o equivalentemente $b = 3$. A partir de la relación $a^2 - c^2 = b^2$, se concluye que $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{36 - 9} = \sqrt{27}$.
De la información anterior obtenemos los siguientes elementos de la elipse:

- Los vértices son los puntos $V_1 = (-6, 0)$ y $V_2 = (6, 0)$.
- El centro es el punto $C = (0, 0)$.
- Los focos son los puntos $F_1 = (-\sqrt{27}, 0)$ y $F_2 = (\sqrt{27}, 0)$.
- Los extremos del eje menor son los puntos $A_1 = (0, 3)$ y $A_2 = (0, -3)$.
- El eje focal es el eje x y el eje normal es el eje y.

La gráfica de la elipse se presenta a continuación en la figura 17.3

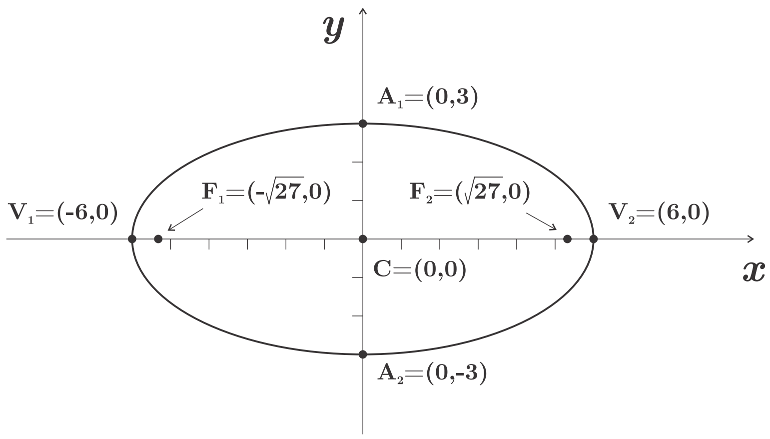


Figura 17.3

Ejemplo 17.2

Halle los elementos y trace la gráfica de la elipse cuya ecuación está dada por

$$9x^2 + 16y^2 - 144 = 0.$$

Solución

Reescribimos la ecuación anterior en una forma adecuada:

$$\begin{aligned} 9x^2 + 16y^2 - 144 &= 0, \\ 9x^2 + 16y^2 &= 144, \\ \frac{9x^2}{144} + \frac{16y^2}{144} &= 1, \\ \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} &= 1, \\ \frac{x^2}{(4)^2} + \frac{y^2}{(3)^2} &= 1. \end{aligned}$$

A partir de la ecuación tenemos que $a = 4$, $b = 3$ y $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{7}$. De nuevo tenemos una elipse horizontal con los siguientes elementos:

- Los vértices son los puntos $V_1 = (-4, 0)$ y $V_2 = (4, 0)$.
- El centro es el punto $C = (0, 0)$.
- Los focos son los puntos $F_1 = (-\sqrt{7}, 0)$ y $F_2 = (\sqrt{7}, 0)$.
- Los extremos del eje menor son los puntos $A_1 = (0, 3)$ y $A_2 = (0, -3)$.
- El eje focal es el eje x y el eje normal es el eje y.

La figura 17.4 nos presenta la gráfica de la elipse de este ejemplo.

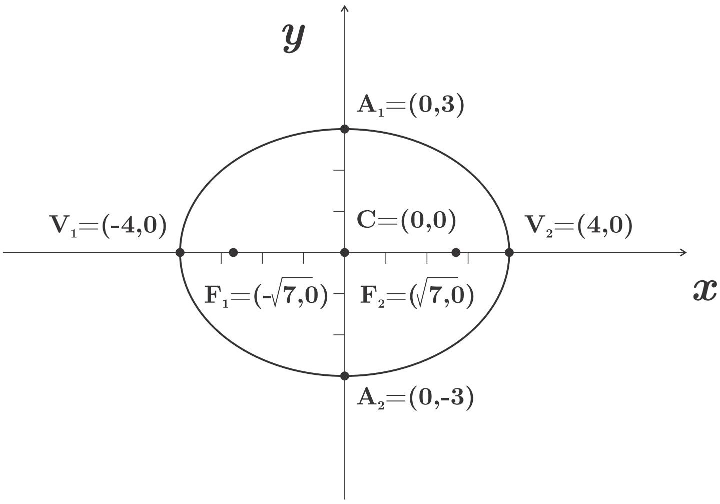


Figura 17.4

Lección 18

Hipérbolas I

Definición

Llamamos **hipérbola** al conjunto de puntos del plano tales que la diferencia de las distancias a dos puntos fijos dados tomada en valor absoluto, llamados focos, es una constante positiva.

Ecuación de la hipérbola

Consideremos una hipérbola cuyos focos sean los puntos $F_1 = (-c, 0)$ y $F_2 = (c, 0)$, donde c es un número real positivo, y supongamos que el punto $P = (x, y)$ es un punto de la hipérbola (ver figura 18.1).

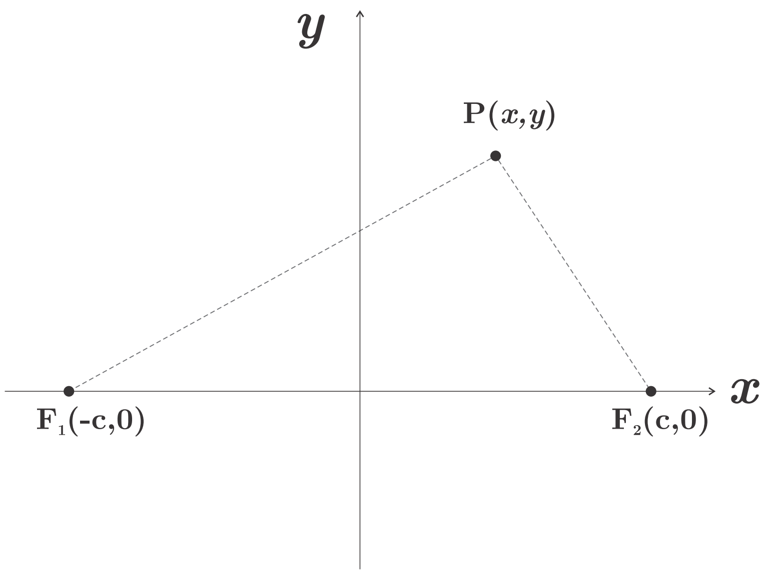


Figura 18.1

Llamemos $2a$, con $a > 0$, al valor absoluto de la diferencia entre la distancia de P a F_1 y la distancia de P a F_2. Esta diferencia puede ser positiva o negativa, entonces tenemos que

$$
\begin{aligned}
d(P,F_1)-d(P,F_2) &= \pm 2a,\\
\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}-\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2} &= \pm 2a,\\
\sqrt{(x+c)^2+y^2} &= \sqrt{(x-c)^2+y^2}\pm 2a,\\
\left[\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right]^2 &= \left[\sqrt{(x-c)^2+y^2}\pm 2a\right]^2,\\
(x+c)^2+y^2 &= (x-c)^2+y^2\pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+4a^2,\\
x^2+2xc+c^2 &= x^2-2xc+c^2\pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+4a^2,\\
4xc-4a^2 &= \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2},\\
xc-a^2 &= \pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2},\\
(xc-a^2)^2 &= \left[\pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right]^2,\\
x^2c^2-2xca^2+a^4 &= a^2[(x-c)^2+y^2],\\
x^2c^2-2xca^2+a^4 &= a^2(x^2-2xc+c^2+y^2),\\
x^2c^2-2xca^2+a^4 &= a^2x^2-2xca^2+a^2c^2+a^2y^2,\\
x^2(c^2-a^2)-a^2y^2 &= a^2(c^2-a^2).
\end{aligned}
$$

Ahora, como la suma de las longitudes de dos de los lados de un triángulo es mayor que la longitud del tercer lado, entonces

$$
\begin{aligned}
d(P,F_1)+d(F_1,F_2) &> d(P,F_2),\\
d(F_1,F_2) &> d(P,F_2)-d(P,F_1),\\
2c &> 2a.
\end{aligned}
$$

Y si elevamos al cuadrado obtenemos $c^2 > a^2$, lo cual es equivalente a $c^2 - a^2 > 0$. De esta forma, definiendo $b^2 = c^2 - a^2$, con $b > 0$, y reemplazando en la expresión obtenida anteriormente, se sigue que

$$x^2b^2 - a^2y^2 = a^2b^2.$$

Luego, si dividimos esta última expresión por a^2b^2, obtenemos

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1}$$

que es la ecuación de la hipérbola con focos $F_1 = (-c, 0)$ y $F_2 = (c, 0)$.

Gráfica de la hipérbola con focos (-c,0) y (c,0)

Simetría

Observemos que si en la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

reemplazamos x por $-x$ o y por $-y$, la ecuación no cambia. Esto significa que la gráfica es simétrica con respecto al eje y y con respecto al eje x y entonces al punto $(0,0)$ se le denomina centro de la hipérbola.

Intersección con los Ejes

Si $x = 0$, obtenemos en la ecuación de la hipérbola

$$y^2 = -b^2.$$

Como $b \neq 0$, entonces no existe un valor real de y que satisfaga la anterior igualdad. Esto significa que la gráfica de la hipérbola con ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

no intercepta el eje y.

Si $y = 0$, obtenemos en la ecuación de la hipérbola

$$x^2 = a^2.$$

Esta ecuación tiene dos soluciones: $x = -a$ y $x = a$, lo cual quiere decir que la gráfica de la hipérbola con ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

intercepta el eje x en los puntos $(-a, 0)$ y $(a, 0)$. A este par de puntos se les conoce como vértices de la hipérbola (ver figura 18.2).

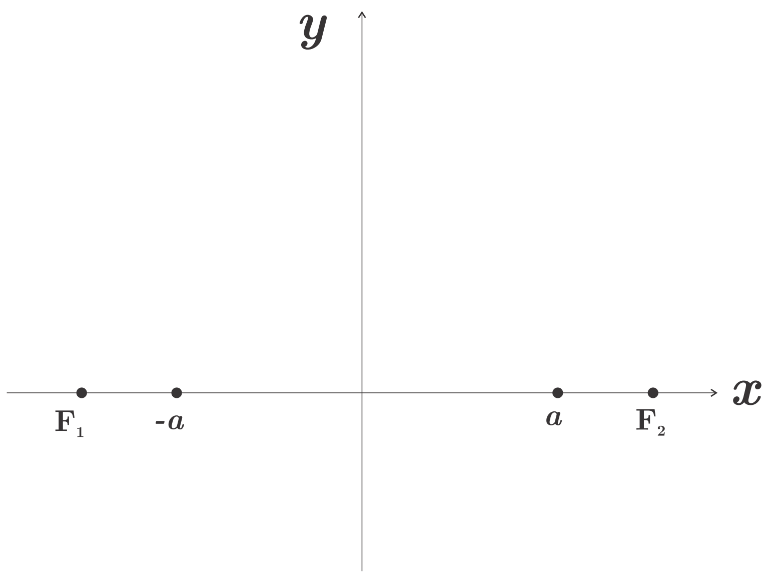


Figura 18.2

Asíntotas

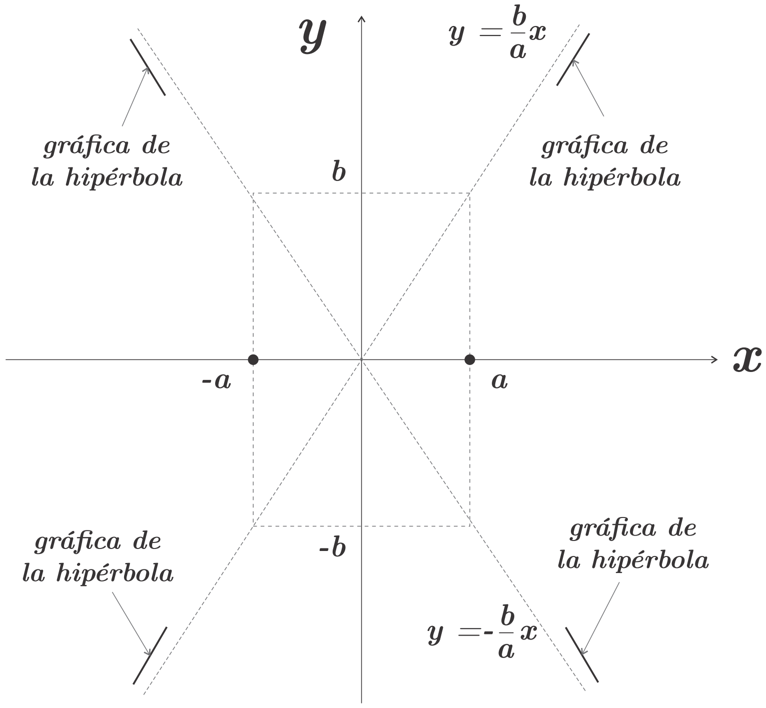
Despejemos y de la ecuación de la hipérbola:

$$\begin{aligned}
\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} &= 1, \\
\frac{x^2}{a^2} - 1 &= \frac{y^2}{b^2}, \\
b^2\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right) &= y^2, \\
y &= \pm b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}, \\
y &= \pm b\sqrt{\frac{x^2}{a^2}\left(1 - \frac{a^2}{x^2}\right)}, \\
y &= \pm \frac{b}{a}x\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}.
\end{aligned}$$

Ahora analicemos el comportamiento de la gráfica muy a la derecha o muy a la izquierda en el eje x, esto es, cuando x^2 es muy grande. En este caso, el valor de $\frac{a^2}{x^2}$ se vuelve muy pequeño, el valor de la raíz cuadrada en la expresión anterior se aproxima mucho a 1 (decimos que tiende a 1) y la gráfica de la hipérbola se aproxima mucho a la gráfica de las rectas con ecuaciones

$$\boxed{y = \frac{b}{a}x \quad \text{y} \quad y = -\frac{b}{a}x,}$$

que son las ecuaciones de dos rectas que pasan por el origen y tienen pendientes $\frac{b}{a}$ y $-\frac{b}{a}$, respectivamente. A este par de rectas se les conoce como **asíntotas de la hipérbola** y, tal como se dedujo, son dos rectas a las cuales se aproxima mucho la gráfica de la hipérbola muy a la izquierda y muy a la derecha en el eje x. La situación se ilustra en la figura 18.3.



y
x
$y = \frac{b}{a}x$
$y = -\frac{b}{a}x$
b
-b
-a
a
gráfica de la hipérbola
gráfica de la hipérbola
gráfica de la hipérbola
gráfica de la hipérbola

Figura 18.3

Lección 19

Hipérbolas II

Ramas de la hipérbola

Si despejamos x^2 de la ecuación de la hipérbola obtenemos

$$x^2 = a^2 \left[1 + \frac{y^2}{b^2}\right],$$

y como $\dfrac{y^2}{b^2} \geq 0$ entonces $1 + \dfrac{y^2}{b^2} \geq 1$, con lo cual

$$\begin{aligned} x^2 &\geq a^2 \\ x^2 - a^2 &\geq 0 \\ (x-a)(x+a) &\geq 0, \end{aligned}$$

que equivale a $x \in (-\infty, -a] \cup [a, \infty)$. Esto nos indica que no hay puntos (x, y) en la gráfica de la hipérbola para los cuales $x \in (-a, a)$. En otras palabras, la gráfica de la hipérbola está dividida en dos partes: aquella que corresponde a los puntos (x, y) con $x \leq -a$ y aquella que corresponde a los puntos (x, y) con $x \geq a$. A cada una de estas partes se le llama rama de la hipérbola.

Empleando toda la información analizada procedemos, en la figura (19.1), a realizar la gráfica de la hipérbola con focos $(-c, 0)$ y $(c, 0)$.

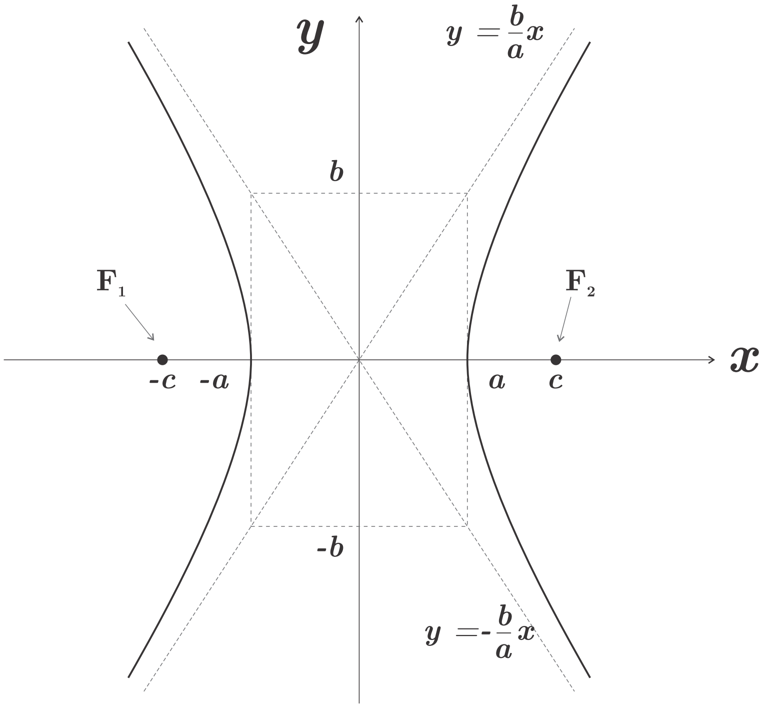


Figura 19.1

Por la forma de la gráfica, al eje x se le denomina eje transversal de la hipérbola y decimos que la hipérbola es horizontal.

Ejemplo 19.1

Halle los vértices, focos, asíntotas y trace la gráfica de la hipérbola cuya ecuación viene dada por

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

Solución

Vértices: Observamos que $a = 2$, por lo tanto los vértices son $(-2, 0)$ y $(2, 0)$.

Focos: Como $b = 3$ entonces $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13} \approx 3.6$. Así que los focos son $(-\sqrt{13}, 0)$ y $(\sqrt{13}, 0)$.

Asíntotas: Las asíntotas son $y = \pm\frac{3}{2}x$.

Gráfica: Con toda la información procedemos, en la figura 19.2, a realizar la gráfica de la hipérbola

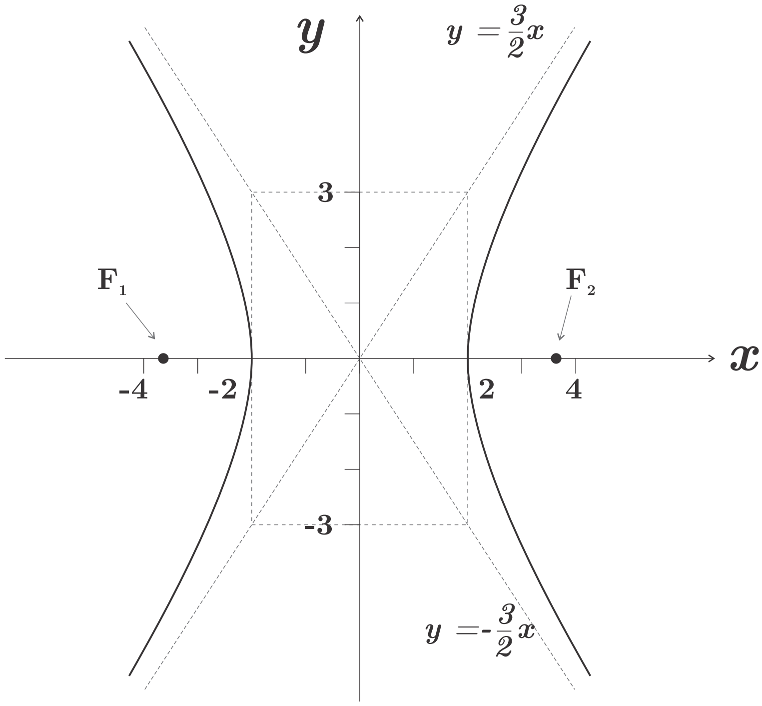


Figura 19.2

Gráfica de la hipérbola con Focos (0,-c) y (0,c)

Mediante un análisis similar al realizado previamente podemos ver que los elementos de la hipérbola con focos $(0, -c)$ y $(0, c)$ son:

Ecuación: $\dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2} = 1$, con $c^2 = a^2 + b^2$.

Simetría: Con respecto al eje x y con respecto al eje y.

Interceptos con el eje x: No tiene.

Interceptos con el eje y: Vértices: $(0, -a)$ y $(0, a)$.

Asíntotas: $y = \pm\dfrac{a}{b}x$.

Ramas: $y \leq -a$ y $y \geq a$.

Eje transversal: Eje y.

Gráfica: Según la información, la gráfica se muestra en la figura 19.3

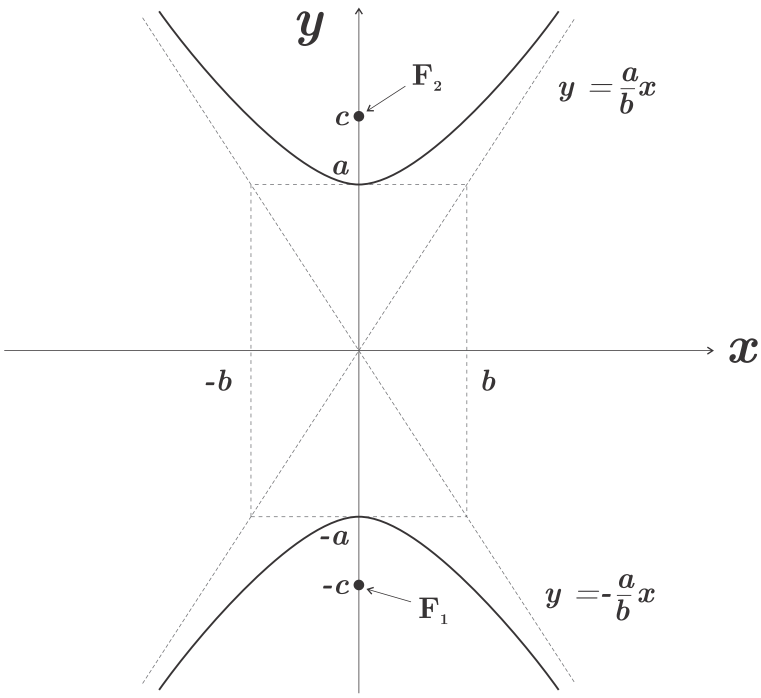


Figura 19.3

Por la forma de la gráfica, decimos que la hipérbola es vertical.

Ejemplo 19.2

Halle los vértices, focos, asíntotas y trace la gráfica de la hipérbola cuya ecuación está dada por

$$16y^2 - 9x^2 - 144 = 0.$$

Solución

Reescribimos la ecuación de la hipérbola de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} 16y^2 - 9x^2 &= 144, \\ \frac{16y^2}{144} - \frac{9x^2}{144} &= 1, \\ \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} &= 1. \end{aligned}$$

Por la forma de la ecuación se trata de una hipérbola vertical.

Vértices: Observamos que $a = 3$, por lo tanto los vértices son $(0, -3)$ y $(0, -3)$.

Focos: Como $b = 4$ entonces $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$. Así que los focos son $(0, -5)$ y $(0, 5)$.

Asíntotas: Las asíntotas son $y = \pm\dfrac{3}{4}x$.

Gráfica: Con la información obtenida la gráfica se presenta en la figura 19.4

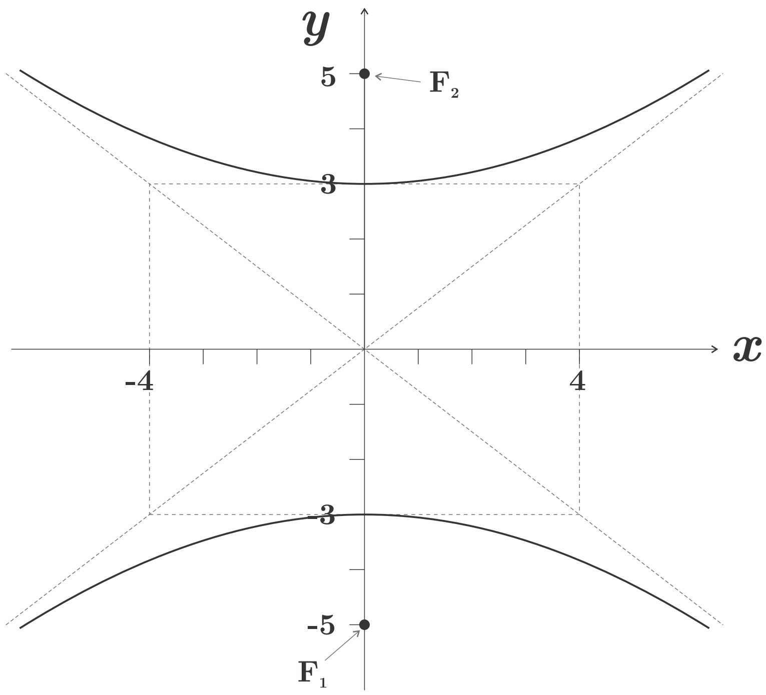


Figura 19.4

Ejemplo 19.3

Halle la ecuación de la hipérbola con focos $(-6, 0)$ y $(6, 0)$ y vértices $(-4, 0)$ y $(4, 0)$.

Solución

Observamos que $c = 6$ y que $a = 4$. Por lo tanto $b^2 = c^2 - a^2 = 36 - 16 = 20$.

Como los focos están sobre el eje x entonces la ecuación es

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$
$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{20} = 1.$$

Lección 20

Vectores algebraicos

Tanto en la física, como en la vida cotidiana, hay cantidades tales como la longitud, la masa, la densidad, el tiempo, el número de ladrillos necesarios para levantar una pared, etc, que quedan completamente determinadas por un número real, acompanadas de una unidad correspondiente. Nos referimos a estas cantidades, como cantidades escalares. Por ejemplo la estatura de una persona queda determinada si indicamos el número de unidades de longitud (centímetros, metros, pies, etc) que mide la persona, o al decir que la temperatura de un objeto son 5 grados centígrados, lo hemos descrito completamente.

Sin embargo, si queremos mover un objeto muy pesado de un lugar a otro, debemos aplicar una fuerza sobre el mismo para desplazarlo. Notemos que no es suficiente con decir, que aplicando una fuerza de 3 Newton sobre el objeto para desplazrlo, dicha fuerza queda determinada. Necesitamos la dirección en la que la fuerza se aplica sobre el objeto para lograr desplazrlo. Así que hay cantidades como el desplazamiento, la velocidad, la aceleración, la fuerza, etc, que se caracterizan por tener magnitud y dirección, a estas las denominamos cantidades vectoriales y el concepto matemático para describirlas es el de vector.

Las cantidades vectoriales las representamos por medio de un segmento de recta orientado o dirigido, es decir especificando cual es su punto inicial y cual su punto final, como lo indica la figura.

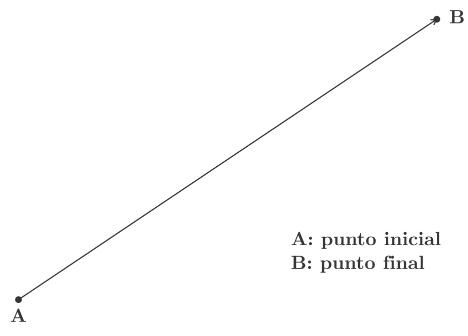


Figura 20.1

Llamaremos **vectores geométricos** a todo segmento de recta orientado. Si un vector geométrico tiene punto inicial A y punto final B, entonces lo denotaremos por $\overrightarrow{AB}$. Notemos entonces que $\overrightarrow{AB}$ es diferente de $\overrightarrow{BA}$. También podemos representar los vectores geométricos por medio de letras minúsculas con una flecha encima, como por ejemplo $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$.

Para poder determinar exactamente un vector geométrico $\overrightarrow{AB}$, necesitamos conocer:

1. **La magnitud o módulo del vector**, es la longitud del segmento $\overline{AB}$. La magnitud de un vector $\overrightarrow{AB}$ o $\overrightarrow{u}$, la denotaremos por $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$ ó por $\|\overrightarrow{u}\|$.

2. **La dirección del vector** $\overrightarrow{AB}$, que es el ángulo θ que se indica en la figura, medido apartir de un semieje horizontal que se toma como referencia, en sentido antihorario.

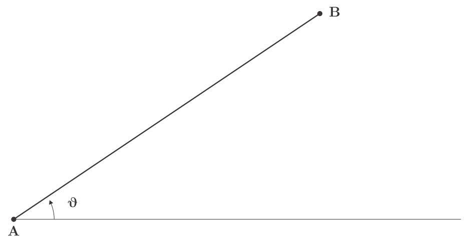


Figura 20.2

Es decir, en el punto inicial A del vector $\overrightarrow{AB}$ trazamos una semirecta horizontal orientada hacia la derecha, entonces la dirección del vector $\overrightarrow{AB}$ es el ángulo θ que se forma al ir de esta semirecta al segmento $\overline{AB}$ en sentido antihorario.

Por tanto un vector geométrico queda completamente determinado por su magnitud y dirección.

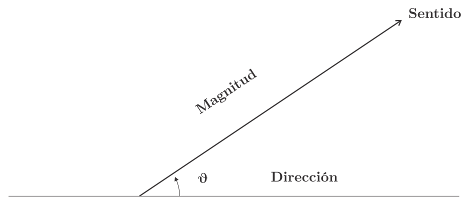


Figura 20.3

Diremos que dos vectores geométricos $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ son iguales si y sólo si tienen la misma magnitud y dirección.

Notemos que por ejemplo los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BA}$. tienen la misma magnitud, pero direcciones opuestas, luego $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BA}$.

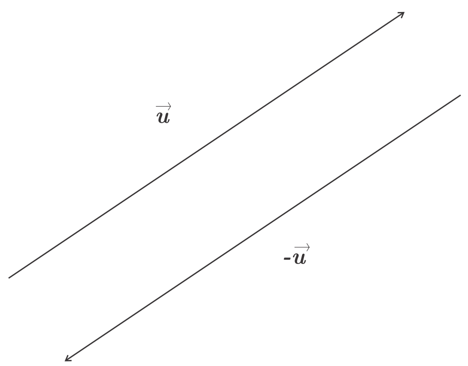


Figura 20.4

Notemos que para cada vector $\overrightarrow{u}$ en el plano podemos dibujar un vector igual a él con el punto inicial en el origen O del sistema de coordenadas cartesiano. Esto nos determina un punto P de coordenadas (x, y) del plano que es el correspondiente punto final del vector $\overrightarrow{OP}$, es decir $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OP}$.

Por tanto todos los vectores geométricos se convierten en vectores algebraicos o coordenados cuando los primeros son colocados en un sistema de coordenadas en la forma descrita anteriormente. Asi un vector algebraico es un vector expresado como un par ordenado (x, y) de números reales, es decir, podemos identificar al vector $\overrightarrow{OP}$ (donde O es el origen de coordenadas en el plano cartesiano) con su punto final P, de coordenadas (x, y), y decimos que x e y son las componentes del vector. A este vector $\overrightarrow{OP}$ también lo llamamos vector de posición y decimos que el vector está en posición canónica.

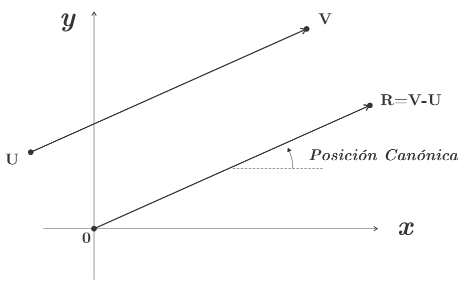


Figura 20.5

Como hemos indicado un vector en el plano tiene dos componentes, una horizontal (en la dirección del eje x) y otra vertical (en la dirección del eje y). Si un vector $\overrightarrow{u}$ en el plano tiene un punto inicial A de coordenadas (x_1, y_1) y punto final B de coordenadas (x_2, y_2), entonces el vector $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ es igual al vector $\overrightarrow{OP}$, donde las coordenadas del punto P son $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$. Cuando el punto inicial de un vector $\overrightarrow{u}$ es el origen decimos que el vector $\overrightarrow{u}$ está en posición canónica. Así el vector $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OP}$ está en posición canónica (ver figura).

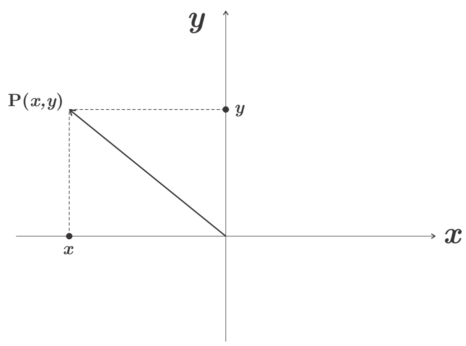


Figura 20.6

Ejemplo 20.1

Hallar las componentes del vector con punto inicial A de coordenadas $(-2, 3)$ y punto final B de coordenadas $(3, -1)$.

Solución

La figura muestra el vector en posición canónica. Notemos que el vector $\overrightarrow{AB}$ es igual al vector $\overrightarrow{OP}$, donde las componentes de este vector están dadas por las coordenadas del punto P y son $(x_2 - x_1, y_2 - y_1) = (3 - (-2), -1 - 3) = (5, -4)$.

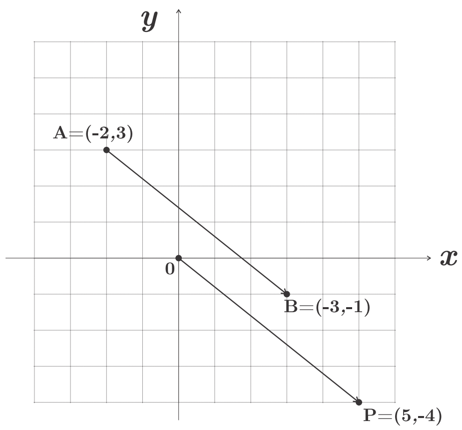


Figura 20.7

Recordemos que un vector algebraico lo podemos identificar con un punto en el plano cartesiano y por tanto es expresa como un par ordenado de números reales, así en adelante nos referiremos a un vector algebraico o coordenado como a un par ordenado de números reales (x, y). Por tanto de la definición de igualdad entre vectores, tenemos que dos vectores algebraicos $X = (x_1, y_1)$ y $Y = (x_2, y_2)$, son iguales si sus respectivas componentes son iguales, es decir $X = Y$, si y sólo si $x_1 = x_2$ y $y_1 = y_2$.

Suma y producto por un escalar

Dados dos vectores $X = (x_1, y_1)$ e $Y = (x_2, y_2)$ en $\mathbb{R}^2$ y un escalar λ, definimos la suma de los vectores X e Y, y definimos el producto del escalar λ por el vector X, que denotamos respoectivamente por $X + Y$, y λX como:

$$\begin{aligned} X + Y &= (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), y \\ \lambda X &= \lambda (x_1, y_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1) \end{aligned}$$

Ejemplo 20.2

Sean $X = (2, -3)$ y $Y = (-4, 1)$. Encuentre los vectores algebraicos $X + Y$, $3X$, $-X$ y $3X + Y$

Solución

De la definición de suma y producto por un escalar tenemos:

$$
\begin{aligned}
X+Y &= (2,-3)+(-4,1)=(2+(-4)\,,-3+1)=(-2,-2)\\
3X &= 3\,(2,-3)=(3*2,3*(-3))=(6,-9)\\
-X &= -\,(2,-3)=((-1)*2,(-1)*(-3))=(-2,3)\\
3X+Y &= 3\,(2,-3)+(-4,1)=(6,-9)+(-4,1)=(6+(-4)\,,-9+1)=(2,-8)\,.
\end{aligned}
$$

Notemos que si $X=(x,y)$ e $O=(0,0)$, entonces tenemos que

$$
\begin{aligned}
X+O &= (x,y)+(0,0)=(x,y)=X, y\\
X+(-X) &= (x,y)+(-\,(x,y))=(x,y)+(-x,-y)=(0,0)=O
\end{aligned}
$$

Al vector algebraico $O=(0,0)$ lo llamamos vector nulo o vector cero de $\mathbb{R}^2$ y al vector $-X=(-x,-y)$ lo llamamos inverso aditivo del vector $X=(x,y)$.

Propiedades

Dados los vectores $X,\ Y$ e Z de $\mathbb{R}^2$ y escalares α y β se cumple que:

1. $X+Y\in\mathbb{R}^2$
2. $X+Y=Y+X,$
3. $(X+Y)+Z=X+(Y+Z)\,,$
4. $X+O=X,$
5. $X+(-X)=O,$
6. $1.X=X,$
7. $\alpha\,(\beta X)=(\alpha\beta)\,X,$
8. $\alpha\,(X+Y)=\alpha X+\alpha Y,$
9. $(\alpha+\beta)\,X=\alpha X+\beta X,.$

Dados $X=(x_1,y_1)$ e $Y=(x_2,y_2)$ en $\mathbb{R}^2$ llamamos la diferencia de X y Y, que denotamos por $X-Y$, al vector

$$X-Y=(x_1-x_2,y_1-y_2)$$

Ejemplo 20.3

Dados $X=(2,-3)$ y $Y=(-4,1)$, tenemos que $X-Y=(2,-3)-(-4,1)=(2-(-4)\,,-3-1)=(6,-4)\,.$

Magnitud y dirección

Dado un vector $X=(x,y)$ sabemos que su magnitud es la longitud del segmento $\overline{OX}$ y por tanto

$$\|X\|=\|(x,y)\|=\sqrt{x^2+y^2}$$

es decir $\|X\|$ es la distancia del punto X al origen O.

Ejemplo 20.4

Si $X = (2, -3)$, entonces $\|X\| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$.

Si el vector $\overrightarrow{u}$ tiene punto inicial en el punto A de coordenadas (x_1, y_1) y este no es el origen de coordenadas y punto final en B de coordenadas (x_2, y_2) , entonces llevamos este vector a la posición canónica y así tenemos que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OP}$, donde P es el punto de coordenadas $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ y por tanto

$$\|\overrightarrow{u}\| = \|P\| = \|(x_2 - x_1, y_2 - y_1)\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

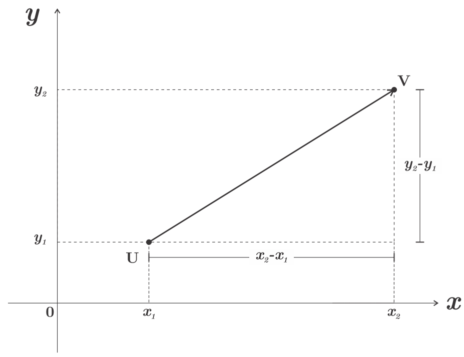


Figura 20.8

Ejemplo 20.5

Si $A = (-2, 5)$ y $B = (1, -3)$, entonces la magnitud del vector $\overrightarrow{AB}$ es

$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \|B - A\| = \sqrt{(1-(-2))^2 + (-3-5)^2} = \sqrt{(1+2)^2 + (-8)^2} = \sqrt{73}$$

Propiedades

Para vectores X y U en $\mathbb{R}^2$ y un escalar real λ se verifica que:

1. $\|X\| \geq 0$,
2. $\|X\| = 0$ si y sólo si $X = (0, 0) = O$,
3. $\|\lambda X\| = |\lambda| \, \|X\|$,
4. $\|X + U\| \leq \|X\| + \|U\|$ (Desigualdad triangular)

Ahora consideremos un vector algebraico no nulo P en $\mathbb{R}^2$. La dirección de P que denotamos por $dirP$ es el ángulo θ que se indica en la figura, es decir, el ángulo θ que forma el segmento $\overline{OP}$ con el eje x positivo medido apartir del eje x positivo en sentido antihorario y se expresado en grados sexagesimales $0° \leq \theta < 360°$ o radianes $0 \leq \theta < 2\pi$

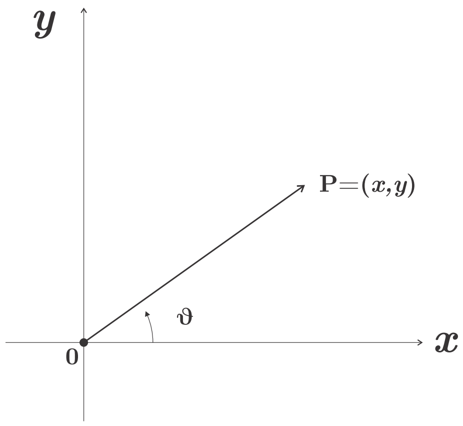


Figura 20.9

Notemos que si $U = (x, y)$ y $x = 0$ entonces $dirU = 90°$ si $y > 0$ y $dirU = 270°$ si $y < 0$

Recordemos que si $U = (x, y)$ y $x \neq 0$ para el trilángulo OVU de la figura, la tangente del ángulo θ se define como

$\tan\theta = \frac{y}{x}$, (es decir longitud del lado opuesto /longitud del lado adyacente.)

Debemos tener cuidado para encontrar la dirección de un vector (x, y). Por ejemplo si $x \neq 0$, entonces $\tan(\theta) = \frac{y}{x}$ y si θ es agudo entonces $\theta = arctg(\frac{y}{x})$. Ahora si θ no es agudo, entonces $\theta \neq \ arctg(\frac{y}{x})$, en este caso debemos analizar en que cuadrante esta el vector.

Ejemplo 20.6

Hallar la dirección del vector $X = (1, -1)$

Solución

Si θ es la dirección del vector X, entonces $\tan(\theta) = \frac{1}{-1} = -1$. Pero notemos que hay dos ángulos cuya tangente es -1, a saber 135° y 315°. En general dos ángulos que difieren en 180° tienen la misma tangente. Para decidir cuál ángulos es el que debemos tomar, analizamos las componentes del vector. Como la primera componente es positiva y la segunda negativa el vector esta en el cuarto cuadrante y por tanto $\theta = 315°$.

Un vector de $\mathbb{R}^2$ es llamado un vector unitario si tiene magnitud 1. Por tanto si $U \in \mathbb{R}^2$ es un vector no nulo entonces el vector $\frac{U}{\|U\|}$ es un vector unitario. Notemos que un vector unitario de $\mathbb{R}^2$ con dirección θ es $(cos\theta, sen\theta)$ y por lo tanto si U es un vector no nulo con dirección θ, entonces un vector unitario en la dirección de U es $\frac{U}{\|U\|} = (cos\theta, sen\theta)$ y es llamado la normalización del vector U. Por tanto tenemos que todo vector U de $\mathbb{R}^2$ lo podemos escribir como $U = \|U\| \, (cos\theta, sen\theta)$.

Ejercicios

1. Halle la magnitud y dirección de los vectores $X = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $Y = (-2, 3)$, $Z = (-2, -2)$ y $W = (3, -3)$.

2. Sean $X = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ y $Y = \left(-\sqrt{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$

   (a) Muestre que X es un vector unitario y halle su dirección

   (b) Halle el vector $X + Y$ y normalícelo

   (c) Halle un vector W con la dirección opuesta al vector $X + Y$ y tal que su magnitud es 7

3. Dados los vectores $U = (-3, 5)$, $V = (2, -2)$ y $W = (2, 3)$ de $\mathbb{R}^2$ encuentre:

   (a) La magnitud y dirección del vector $Z = U - V + 3W$

   (b) Todos los escalares λ tales que $\|\lambda W\| = 9$

   (c) La distancia entre los vectores U y V.

Talleres

Taller 1:

1. El ángulo b mide $\frac{\pi}{5}$ radianes. Encuentre su medida en grados.
2. El ángulo c mide 2 radianes. Encuentre la medida de c en grados y represente este ángulo geométricamente.
3. Exprese los siguientes ángulos en el sistema circular:
   (a) $30°$, (b) $45°$, (c) $60°$, (d) $90°$, (e) $120°$, (f) $150°$.
4. Dados los siguientes ángulos, encuentre sus ángulos complementarios:
   (a) $60°$, (b) $90°$, (c) $55°$, (d) $\frac{\pi}{4}$ rad.
5. Dados los siguientes ángulos, encuentre sus ángulos suplementarios:
   (a) $60°$, (b) $130°$, (c) $\frac{\pi}{2}$ rad , (d) $\frac{\pi}{4}$ rad .
6. Si α es un ángulo agudo de un triángulo rectángulo y $\tan\alpha = 4$, calcule $\operatorname{sen}\alpha$ y $\cos\alpha$.
7. Encuentre la longitud de los catetos de un triángulo rectángulo isósceles cuya hipotenusa mide 8 cm.
8. Encuentre la altura de un triángulo isósceles cuya base mide 14 cm y el ángulo opuesto a la base mide $80°$.
9. En un trapecio isósceles su base menor mide 3 cm, su base mayor 27 cm y sus lados no paralelos 13 cm. Encuentre la medida de la altura.
10. Suponga que una ciudad A está al sur de la ciudad B y al occidente de otra ciudad C. Un automóvil parte de la ciudad A a una velocidad de 70 km/h. Otro sale de la ciudad B a 74 km/h. La velocidad de los dos es constante y no se detienen. Si los dos se encuentran en C a la media hora, halle la distancia que hay entre las ciudades A y B.
11. Un globo flota en el aire exactamente sobre el segmento de recta que une los puntos A y B, los cuales están a 3 kilómetros de distancia entre sí. Si el ángulo de elevación desde el punto A mide $30°$ y desde el punto B mide $60°$, determine la altura del globo.

Taller 2:

1. Determine el signo de los siguientes valores:
   (a) $\cos\frac{9\pi}{4}$, (b) $\tan 520°$, (c) $\sec(-370°)$.

2. Calcule el valor exacto de los siguientes valores
   (a) $\operatorname{sen}\frac{7\pi}{6}$, (b) $\cos\frac{5\pi}{4}$, (c) $\tan(-\frac{5\pi}{3})$, (d) $\operatorname{sen}(-\frac{5\pi}{4})$.

3. Represente cada par de ángulos dados en posición estándar. Determine si ellos son coterminales y el cuadrante en el cual se encuentran.
   (a) $\delta = -\frac{9\pi}{4}$ y $\eta = -\frac{\pi}{4}$, (b) $\sigma = -\frac{5\pi}{4}$ y $\omega = \frac{3\pi}{4}$.

4. Encuentre un ángulo coterminal con $\frac{\pi}{3}$.

5. Encuentre un ángulo coterminal con el ángulo cuadrantal $\frac{3\pi}{2}$.

6. Encuentre un ángulo coterminal con -3π.

7. Usando los ángulos de referencia encuentre el seno, el coseno y la tangente del ángulo cuya medida es $\frac{7\pi}{4}$.

8. Encuentre los valores del seno y del coseno del ángulo con medida $480°$.

9. Use los ángulos de referencia para encontrar los valores de $\operatorname{sen}\alpha, \cos\alpha$ y $\tan\alpha$, si $\alpha = -775°$.

Taller 3:

1. Por la observación de las gráficas de las funciones seno, coseno y tangente responda las siguientes preguntas:

    (a) ¿Existen números reales t para los cuales $\operatorname{sen} t = -2$?

    (b) ¿Existen números reales t para los cuales $\tan t = -2$?

    (c) ¿Cuántas veces se repite un ciclo completo de la función $z = \tan t$ en el intervalo abierto $(-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$?

    (d) ¿Cuántas veces se repite un ciclo completo de la función $z = \cos t$ en el intervalo cerrado $[-3\pi, 3\pi]$?

    (e) Determine para cuales números reales t en el intervalo $[-4\pi, 4\pi]$, toma la función $y = \operatorname{sen} t$ su máximo valor.

    (f) Determine para cuales números reales t en el intervalo $[-3\pi, 3\pi]$, toma la función $y = \cos t$ su mínimo valor.

    (g) Determine cuántos números reales t en el intervalo $[-2\pi, 2\pi]$, satisfacen que $\operatorname{sen} t = -\dfrac{1}{2}$.

    (h) Determine para cuáles números reales t en el intervalo $[-2\pi, 2\pi]$, satisfacen que $\operatorname{sen} t = -\dfrac{1}{2}$.

    (i) ¿Cuáles números reales t en el intervalo $(-\frac{3\pi}{2}\frac{3\pi}{2})$, satisfacen que $\tan t = -1$?

    (j) ¿Cuáles números reales t en el intervalo $(-\frac{5\pi}{2}\frac{5\pi}{2})$, satisfacen que $\tan t = 1$?

2. Determine para cuales de las siguientes funciones el valor $t = \frac{\pi}{2}$ pertenece a su dominio
   (a) $z = \operatorname{sen} t$, (b) $z = \tan t$, (c) $z = \csc t$, (d) $z = \sec t$.

3. Determine para cuales de las siguientes funciones el valor $t = 1.5$ pertenece a su rango
   (a) $z = \operatorname{sen} t$, (b) $z = \tan t$, (c) $z = \csc t$, (d) $z = \sec t$.

4. Determine para cuales de las siguientes funciones el valor $t = 0$ pertenece a su dominio
   (a) $z = \operatorname{sen} t$, (b) $z = \tan t$, (c) $z = \csc t$, (d) $z = \sec t$.

5. Determine para cuales de las siguientes funciones el valor $t = -0.5$ pertenece a su rango
   (a) $z = \operatorname{sen} t$, (b) $z = \tan t$, (c) $z = \csc t$, (d) $z = \sec t$.

6. Complete los datos de la siguiente tabla y con éstos, trace la gráfica de la función $z = -\frac{1}{2}\operatorname{sen} t$ en un sistema de coordenadas rectangulares tz.

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$-\frac{1}{2}\operatorname{sen} t$	0	$-\frac{1}{4}$			$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{4}$			0			$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{4}$	0

7. Realice tablas similares a la del ejercicio anterior para las funciones $z = \cos t$, y $z = \cos 2t$ y trace las gráficas de las respectivas funciones en el sistema de coordenadas rectangulares tz.

8. Por comparación con la gráfica de la función $z = \cos t$, construya las gráficas de las funciones $z = -\cos t$ y $z = 1 + \cos t$

Taller 4:

1. Determine la amplitud de cada una de las siguientes funciones
   (a) $z = -\frac{1}{2}\operatorname{sen} t$, (b) $z = 3\cos t$, (c) $z = \operatorname{sen} 5t$, (d) $z = -\sqrt{2}\cos\frac{t}{2}$.

2. Calcule los períodos de las siguientes funciones: $z = \cos t$, $z = \cos 2t$, $z = \cos\frac{1}{2}t$.

3. Determine el período de cada una de las siguientes funciones:
   (a) $z = -3\operatorname{sen} t$, (b) $z = 2\operatorname{sen} 2t$, (c) $z = -2\operatorname{sen}\frac{t}{2}$, (d) $z = \tan 2t$.

4. Compare las gráficas de la siguientes funciones y determine el rango de cada una de ellas: $z = \cos t$ y $z = \frac{1}{4}\cos t$.

5. Determine el rango de las siguientes funciones $z = \frac{1}{2}\cos 2t$ y $z = -\frac{1}{3}\operatorname{sen} t$

6. Para cada una de las siguientes funciones encuentre su amplitud, período, desplazamiento de fase y, sin uso de tablas, haga un bosquejo de la gráfica.
   (a) $y = -\cos(2x + \pi)$, (b) $y = \operatorname{sen}(2x - \pi)$.

7. En cada uno de los siguientes ejercicios escriba una función de la forma $z = A\operatorname{sen}(Bt - C)$, utilizando la información dada:

   (a) Amplitud igual a 2, período igual a π, desplazamiento de fase igual a $\frac{\pi}{2}$ unidades a la izquierda.

   (b) Valor mínimo igual a -3, período igual a $2\pi/3$, desplazamiento de fase igual a $\frac{\pi}{6}$ unidades a la derecha.

8. Observe la gráfica representada en la figura T.1. Una ecuación que describe la función representada es:

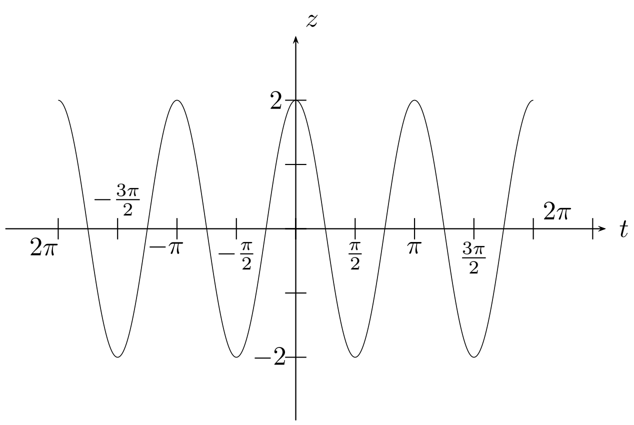


Figura T.1

   (a) $z = 2\operatorname{sen}\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$, (b) $z = -2\operatorname{sen}\left(2t - \frac{\pi}{2}\right)$, (c) $z = 2\operatorname{sen}\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$,
   (d) $z = -2\operatorname{sen}\left(2t + \frac{\pi}{2}\right)$.

9. Algunos metereologos usan la fórmula $f(t) = a\operatorname{sen}(bt - c) + d$ para simular las variaciones de temperatura durante el día. El tiempo t está dado en horas y f(t) en grados celsius. La temperatura de la media noche es la que corresponde a t = 0 .

Si un día en Alaska la temperatura varió según la fórmula $f(t) = -10\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{12}t - \frac{5\pi}{6})$, al respecto de las afirmaciones A y B dadas a continuación es correcto afirmar:

- A. A la media noche la temperatura fue igual a $5°C$.
- B. La temperatura mínima fue $-10°C$.

  (a) A y B son verdaderas.

  (b) A es verdadera y B es falsa.

  (c) A es falsa y B es verdadera.

  (d) A y B son falsas.

Taller 5:

Ejercicio 20.1

Verifique cada una de las siguientes identidades:

1. $1 + \tan^2(-t) = \sec^2 t$.
2. $\frac{1+\tan t}{1-\tan t} = \frac{\cot t+1}{\cot t-1}$.
3. $\frac{\sec t+\tan t}{\cot t+\cos t} = \tan t \sec t$.
4. $\frac{\sec t}{1-\operatorname{sen} t} = \frac{1+\operatorname{sen} t}{\cos^3 t}$.
5. $\cos 2t = 1 - 2\operatorname{sen}^2 t$.
6. $\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$.
7. $\cot 2t = \frac{1}{2}(\cot t - \tan t)$.
8. $\frac{\cos 2t}{1+\operatorname{sen} 2t} = \frac{\cot t-1}{\cot t+1}$.
9. $(\cos^4 t - \operatorname{sen}^4 t) = \cos 2t$.
10. $\tan 3t = \frac{3\tan t-\tan^3 t}{1-3\tan^2 t}$.

Ejercicio 20.2

1. Calcule el valor de $\operatorname{sen} 75°$, utilizando las funciones seno y coseno de los ángulos $30°$ y $45°$.
2. Calcule el valor de $\tan 15°$, utilizando las funciones de los ángulos $30°$ y $45°$.

Ejercicio 20.3

Resuelva las siguientes ecuaciones trigonométricas en el conjunto dado. Si no se da un conjunto se supone que x es un elemento del conjunto de los reales.

1. $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$, $0 \leq x < 2\pi$.
2. $\cos x + \operatorname{sen} x = 1$, $0 \leq x < 2\pi$.
3. $\cos 2x = \cos x$.
4. $\operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 4x = 0$, $0 \leq x < 2\pi$.

Taller 6:

1. Se conocen los dos lados de un triángulo: $a = 2, b = 2.5$ y el ángulo comprendido entre ellos $C = 60°$. Determine sus ángulos restantes y el lado c. Véase la figura T.1.

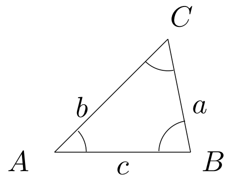


Figura T.1

2. Desde un puesto de observación son detectados dos objetos A y B a distancias de 9 y 8 kilómetros, respectivamente, en relación con el puesto de observación. Si el ángulo entre las líneas de visión hacia los dos objetos es de 140°, ¿cuál es la distancia entre los dos objetos? Véase la figura T.2.

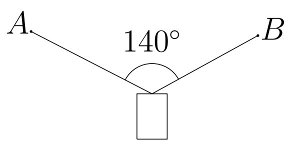


Figura T.2

3. Para medir la altura de una montaña un geógrafo utiliza el siguiente método: a lo largo de una línea, se seleccionan dos puntos diferentes A y B y se miden los ángulos de elevación de la montaña desde A y B. Utilice la información de la figura T.3, para determinar la altura de la montaña.

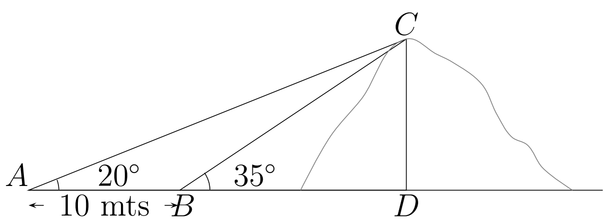


Figura T.3

4. Un poste está inclinado con relación a la vertical y forma un ángulo de 85° con el piso. En un momento del día, el ángulo de elevación del sol es 40° y la sombra del poste sobre el piso mide 3 metros. Encuentre la longitud del poste.

5. Se requiere conocer la distancia entre dos puntos A y B situados en las dos orillas opuestas de un río. Un topógrafo mide, desde el punto A, el ángulo $\angle BAC = 45°$. Luego mide la distancia de A a C, la cual es igual a 200 metros. Desde el punto C mide el ángulo $\angle BCA = 60°$. Determine la distancia desde A hasta B.

6. Un bote navega desde el pueblo A al pueblo B, el cual está a 100 kms de distancia, sobre la misma margen del río. Luego cambia el rumbo en dirección NE (noreste) y se se dirige al punto C. Si la distancia recorrida entre B y C es de 200 kms , ¿cuál es la distancia entre A y C? ¿Cuál ángulo debe girar el piloto en C para volver al pueblo A? Véase la Figura T.4.

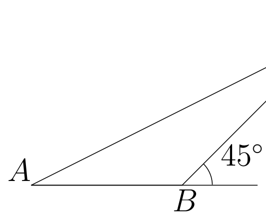


Figura T.4

7. Vamos a considerar una variante del problema anterior: un bote navega desde el pueblo A al pueblo B, que está a 100 kms de distancia sobre la misma margen del río. Luego cambia el rumbo y toma direccion NE (noreste) y se dirige al pueblo C, situado en la otra margen del río. Si la distancia entre A y C es de 200 kms, ¿cuál es la distancia entre B y C? ¿Cuál ángulo debe girar el piloto en C para volver al pueblo A? Véase la Figura T.4.

8. Un globo flota en el aire exactamente sobre el segmento de recta que une los puntos A y B, los cuales están a 3 kilómetros de distancia entre sí. Si el ángulo de elevación desde el punto A mide $30°$ y el ángulo de elevación desde el punto B mide $50°$, determine la altura del globo.

9. Un piloto vuela en una trayectoria recta en la dirección Este, durante una hora y treinta minutos. Luego hace una corrección en el rumbo del vuelo en dirección NE, (Noreste) y vuela 2 horas en esta dirección. Si mantiene una velocidad constante de 300 kilómetros/hora. ¿Qué tan lejos está de su punto de partida?

10. Una cancha de deportes de un colegio tiene forma rectangular con lados que miden 150 mts y 100 mts, respectivamente, como lo indica el gráfico en la figura T.5.

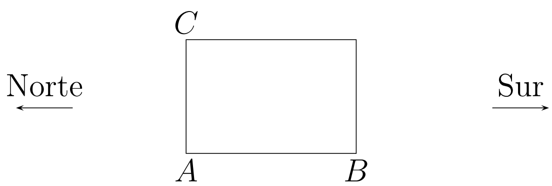


Figura T.5

Tres estudiantes que denominaremos A, B y C están situados en las esquinas de la cancha, como se indica en la figura T.5, de tal forma que la distancia entre A y B es de 150 metros y entre A y C es de 100 metros.

   (a) El estudiante C se mueve 50 mts en línea recta, hacia la esquina sur de la cancha sobre el lado en el cual él se encuentra situado. Determine las medidas de los ángulos del triángulo con vértices en las nuevas posiciones de los estudiantes.

(b) Partiendo de la posición inicial, el estudiante A se mueve en línea recta, $50\sqrt{3}$ mts hacia la esquina sur, donde está situado el estudiante B. Determine las medidas de los ángulos del triángulo con vértices en las nuevas posiciones de los estudiantes.

(c) Partiendo de la posición inicial, el estudiante A se mueve 50 mts hacia la esquina sur, donde está situado el estudiante B y el estudiante B se mueve 50 metros hacia la esquina norte donde estaba situado el estudiante A. Determine las medidas de los ángulos del triángulo con vértices en las nuevas posiciones de los estudiantes.

11. En este ejercicio se trata de reconocer cuál es la estrategia conveniente para resolver el triángulo ΔABC a partir de los datos conocidos y determinar si es posible resolver el triángulo y si se debe utilizar la ley del seno o la ley del coseno. Véase la figura T.1

(a) Conocidos los lados a y c y el ángulo C.

(b) Conocidos los tres ángulos A, B y C.

(c) Si se conoce que el triángulo es rectángulo y se conocen dos lados del triángulo.

(d) Si se conoce que el triángulo es rectángulo y se conocen dos lados a y c y $C = 90°$.

Taller 7:

1. Calcule la ecuación de la recta que cumpla las condiciones dadas.
   (a) Pasa por el punto $P(-2, 4)$ y tiene pendiente -1.
   (b) Pasa por los puntos $R(-1, -2)$ y $S(4, 3)$.
   (c) Pasa por el punto $P\left(\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}\right)$ y es perpendicular a la recta $4x - 8y = 1$.
   (d) Pasa por el punto $P(-2, 1)$ y es paralela a la recta que pasa por los puntos $A(-3, -2)$ y $B(4, 2)$.
2. Halle la distancia del punto $Q(-4, 1)$ a cada una de las rectas obtenidas en el literal anterior.
3. Demuestre que los puntos $A(-3, 0)$, $B(-2, 2)$, $C(-1, -1)$ y $D(0, 1)$ son los vértices de un rectángulo.
4. En cada uno de los siguientes casos, determine si las dos rectas dadas son coincidentes, paralelas, perpendiculares o ninguna de las anteriores.
   (a) $L_1 :\ 2x + 5y = -1$ y $L_2 :\ 10x + 25y = 4$.
   (b) $L_1 :\ x - 3y = -1$ y $L_2 :\ y + 3x = 5$.
   (c) $L_1 :\ y + 3x = 7$ y $L_2 :\ -x + 2y = -3$.
   (d) $L_1 :\ 7y - 2x = -5$ y $L_2 :\ 6x - 21y = 15$.

Taller 8:

Los siguientes ejercicios corresponden a la lecciones sobre la circunferencia y la parábola, sin embargo es posible que el lector necesite usar resultados obtenidos en lecciones anteriores, por favor consulte dichos resultados en la lección indicada.

1. Encuentre la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el origen del sistema de coordenadas y que es tangente a la recta $y = 5$.

2. Encuentre la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el punto de intersección de las rectas $2x + 3y + 1 = 0$ y $x - 2y = 17$ y cuyo radio es igual a la distancia entre los puntos $(3, 1)$ y $(4, 2)$.
   Sugerencia: Consulte las lecciones de linea recta y distancia entre dos puntos.

3. Encuentre la ecuación de la circunferencia que tiene a $\overline{AB}$ como diámetro, sabiendo que $A = (1, 2)$ y $B = (5, 12)$.

4. Encuentre una ecuación para la parábola que tiene vértice en el origen, su eje focal es el eje y y pasa por el punto $(2, -16)$.

5. Halle la ecuación de la parábola que satisface las condiciones dadas:

   (a) Tiene vértice en el origen y su directriz es $y = 2$.

   (b) Tiene foco en $(1, 0)$ y su directriz es $x = -1$.

Taller 9:

Los siguientes ejercicios corresponden a la lección sobre la elipse, sin embargo es posible que el lector necesite usar resultados obtenidos en lecciones anteriores, por favor consulte dichos resultados en la lección indicada.

1. Encuentre la ecuación de la elipse horizontal cuyo eje mayor mide 6 y cuya distancia entre focos es 4.

2. Encuentre la ecuación de la elipse cuyos focos están a una distancia de 6 y cuyos vértices están ubicados en los puntos $V_1 = (0, 5)$ y $V_2 = (0, -5)$.

3. Encuentre la ecuación de la elipse cuyo eje normal es el eje y, con distancia entre los focos igual a 40 y longitud del eje mayor 100.

4. Encuentre las ecuaciones de las rectas que pasan por uno de los focos de la elipse $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ y por el extremo superior del eje menor de dicha elipse.
   Sugerencia: Hacer un esbozo de la gráfica de la elipse para identificar los puntos mencionados en el ejercicio y consulte la lección de rectas en el plano.

5. Encuentre la ecuación de la recta que pasa por el punto $(1, 2)$ y que es perpendicular al eje focal de la elipse $\frac{y^2}{25} + x^2 = 1$.

Taller 10:

1. Con los datos dados determine la ecuación de la hipérbola, la ecuación de las asíntotas y trace su gráfica.
   (a) Focos: $(-6, 0)$ y $(6, 0)$. Vértices: $(-5, 0)$ y $(5, 0)$.
   (b) Focos $(0, -10)$ y $(0, 10)$. Vértices: $(0, -8)$ y $(0, 8)$.
2. Halle los vértices, focos, asíntotas y trace la gráfica de la hipérbola cuya ecuación viene dada por
   (a) $5x^2 - 8y^2 = 40$.
   (b) $7y^2 - 9x^2 = 63$.
3. Halle la ecuación de la hipérbola que tiene uno de los vértices en el punto $(2, 0)$ sabiendo que una de sus asíntotas tiene ecuación $3x - 4y = 0$. Además halle los elementos restantes y trace su gráfica.
4. Halle la ecuación de la hipérbola que tiene uno de los focos en el punto $(0, -5)$ sabiendo que una de sus asíntotas tiene ecuación $2x - 3y = 0$. Además halle los elementos restantes y trace su gráfica.

Bibliografía

[AO] C. Allendoerfer, C. Oakley, *Matemáticas universitarias*, cuarta edición, Editorial McGraw-Hill, 1990.

[B] A. Baldor, *Geometría plana y del espacio, con una introducción a la Trigonometría*, Ediciones y distribuciones Códice, S. A., Madrid, 1967.

[BA] R. Barnett, M. Ziegler, K. Byleen, D. Sobecki, *Analytic Trigonometry with Applications*, 10th edition, John Wiley & Sons, Inc., 2009.

[G] A. Goodman, L. Hirsch, *Álgebra y Trigonometría, con Geometría Analítica*, Editorial Prentice Hall Hispanoamericana, S.A., México, 1996.

[Gue] A. B. Guerrero, *Geometría: Desarrollo Axiomático* , Ecoe Ediciones, Bogotá, 2006.

[L] L. Leithold, *Álgebra y Trigonometría, con Geometría Analítica*, Editorial Harla, S.A., México, 1994.

[S] J. Stewart, L. Redlin, S. Watson, *Precálculo, Matemáticas para el Cálculo*, quinta edición, Editorial Cengace Learning, 2007.

[SL] M. Sullivan, *Trigonometría y Geometría Analítica*, cuarta edición, Editorial Prentice Hall Hispanoaméricana, S.A., México, 1997.

[SW] E. Swokowski, J. Cole, *Álgebra y trigonometría, con Geometría analítica.*, décima edición, Editorial Thomson, 2002.

[ZD] D. Zill, J. Dewar, *Precálculo*, cuarta edición, Editorial McGraw-Hill, 2008.

Tabla de funciones Trigonométricas

Grados	Seno	Coseno	Tangente	Cotangente	Secante	Cosecante	Grados
0		1.000	0	− − −	1.0000	− − −	90
1	0.0175	0.9998	0.0175	57.2900	1.0002	57.2987	89
2	0.0349	0.9994	0.0349	28.6363	1.0006	28.6537	88
3	0.0523	0.9986	0.0524	19.0811	1.0014	19.1073	87
4	0.0698	0.9976	0.0699	14.3007	1.0024	14.3356	86
5	0.0872	0.9962	0.0875	11.4301	1.0038	11.4737	85
6	0.1045	0.9945	0.1051	9.5144	1.0055	9.5668	84
7	0.1219	0.9925	0.1228	8.1443	1.0075	8.2055	83
8	0.1392	0.9903	0.1405	7.1154	1.0098	7.1853	82
9	0.1564	0.9877	0.1584	6.3138	1.0125	6.3925	81
10	0.1736	0.9848	0.1763	5.6713	1.0154	5.7588	80
11	0.1908	0.9816	0.1944	5.1446	1.0187	5.2408	79
12	0.2079	0.9781	0.2126	4.7046	1.0223	4.8097	78
13	0.2250	0.9744	0.2309	4.3315	1.0263	4.4454	77
14	0.2419	0.9703	0.2493	4.0108	1.0306	4.1336	76
15	0.2588	0.9659	0.2679	3.7321	1.0353	3.8637	75
16	0.2756	0.9613	0.2867	3.4874	1.0403	3.6280	74
17	0.2924	0.9563	0.3057	3.2709	1.0457	3.4203	73
18	0.3090	0.9511	0.3249	3.0777	1.0515	3.2361	72
19	0.3256	0.9455	0.3443	2.9042	1.0576	3.0716	71
20	0.3420	0.9397	0.3640	2.7475	1.0642	2.9238	70
21	0.3584	0.9336	0.3839	2.6051	1.0711	2.7904	69
22	0.3746	0.9272	0.4040	2.4751	1.0785	2.6695	68
23	0.3907	0.9205	0.4245	2.3559	1.0864	2.5593	67
24	0.4067	0.9135	0.4452	2.2460	1.0946	2.4586	66
25	0.4226	0.9063	0.4663	2.1445	1.1034	2.3662	65
26	0.4384	0.8988	0.4877	2.0503	1.1126	2.2812	64
27	0.4540	0.8910	0.5095	1.9626	1.1223	2.2027	63
28	0.4695	0.8829	0.5317	1.8807	1.1326	2.1301	62
29	0.4848	0.8746	0.5543	1.8040	1.1434	2.0627	61
30	0.5000	0.8660	0.5774	1.7321	1.1547	2.0000	60
31	0.5150	0.8572	0.6009	1.6643	1.1666	1.9416	59
32	0.5299	0.8480	0.6249	1.6003	1.1792	1.8871	58
33	0.5446	0.8387	0.6494	1.5399	1.1924	1.8361	57
34	0.5592	0.8290	0.6745	1.4826	1.2062	1.7883	56
35	0.5736	0.8192	0.7002	1.4281	1.2208	1.7434	55
36	0.5878	0.8090	0.7265	1.3764	1.2361	1.7013	54
37	0.6018	0.7986	0.7536	1.3270	1.2521	1.6616	53
38	0.6157	0.7880	0.7813	1.2799	1.2690	1.6243	52
39	0.6293	0.7771	0.8098	1.2349	1.2868	1.5890	51
40	0.6428	0.7660	0.8391	1.1918	1.3054	1.5557	50
41	0.6561	0.7547	0.8693	1.1504	1.3250	1.5243	49
42	0.6691	0.7431	0.9004	1.1106	1.3456	1.4945	48
43	0.6820	0.7314	0.9325	1.0724	1.3673	1.4663	47
44	0.6947	0.7193	0.9657	1.0355	1.3902	1.4396	46
45	0.7071	0.7071	1.000	1.0000	1.4142	1.4142	45
Grados	**Coseno**	**Seno**	**Cotangente**	**Tangente**	**Cosecante**	**Secante**	**Grados**

Tabla 20.1

Índice